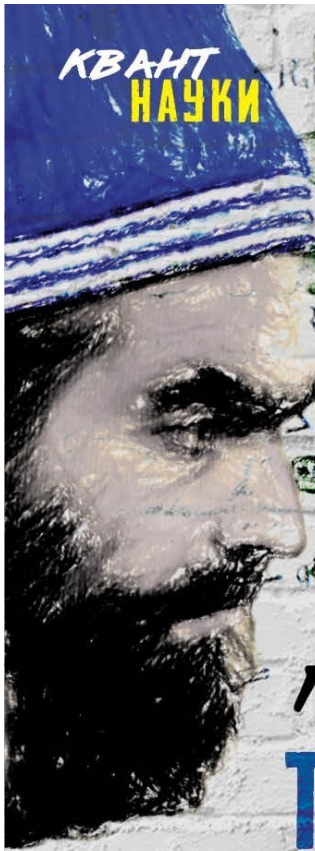


**КВАНТ  
НАУКИ**



**АНРИ  
ПУАНКАРЕ**

**ТЕОРЕМА  
НА МИЛЛИОН  
ДОЛЛАРОВ**

**Анри Пуанкаре**  
**Теорема века. Мир с**  
**точки зрения математики**  
**Серия «Квант науки»**

*Издательский текст*

*[http://www.litres.ru/pages/biblio\\_book/?art=48450259](http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=48450259)*

*Теорема века. Мир с точки зрения математики: Родина; М.; 2020*

*ISBN 978-5-907255-12-8*

**Аннотация**

«Наука не сводится к сумме фактов, как здание не сводится к груде камней». (Анри Пуанкаре)

Автор теоремы, сводившей с ума в течение века математиков всего мира, рассказывает о своем понимании науки и искусства. Как выглядит мир, с точки зрения математики? Как разрешить все проблемы человечества посредством простых исчислений? В чем заключается суть небесной механики? Обо всем этом читайте в книге!

# Содержание

Наука и гипотеза	5
Введение	5
Часть I. Число и величина	11
Глава I. О природе математического умозаключения	11
Глава II. Математическая величина и опыт	30
Часть II. Пространство	50
Глава III. Неевклидовы геометрические системы	50
Глава IV. Пространство и геометрия	68
Глава V. Опыт и геометрия	92
Часть III. Сила	111
Глава VI. Классическая механика	111
Глава VII. Движение относительное и движение абсолютное	135
Глава VIII. Энергия и термодинамика	147
Общие выводы из третьей части	161
Часть IV. Природа	165
Глава IX. Гипотезы в физике[9]	165
Конец ознакомительного фрагмента.	187

**Анри Пуанкаре**  
**Теорема века. Мир с**  
**точки зрения математики**

© ООО «Издательство Родина», 2020

# Наука и гипотеза

## Введение

Для поверхностного наблюдателя научная истина не оставляет места никаким сомнениям: логика науки непогрешима, и если ученые иногда ошибаются, то это потому, что они забывают логические правила.

Математические истины выводятся из небольшого числа очевидных предложений при помощи цепи непогрешимых рассуждений: эти истины присущи не только нам, но и самой природе. Они, так сказать, ставят границы свобод творца и позволяют ему делать выбор только между несколькими относительно немногочисленными решениями. Тогда нескольких опытов будет достаточно, чтобы раскрыть нам, какой выбор им сделан. Из каждого опыта с помощью ряда математических дедукций можно вывести множество следствий, и таким образом каждый из них позволит нам познать некоторый уголок Вселенной.

Вот в таком виде представляется широкой публике или учащимся, получающим первые познания по физике, происхождение научной достоверности. Так они понимают роль опыта и математики. Так же понимали ее сто лет тому назад и многие ученые, мечтавшие построить мир, заимствуя из

опыта возможно меньше материала.

Но, вдумавшись, заметили, что математик, а тем более экспериментатор, не может обойтись без гипотезы. Тогда возник вопрос, достаточно ли прочны все эти построения, и явилась мысль, что при малейшем дуновении они могут рухнуть. Быть скептиком такого рода значит быть только поверхностным. Сомневаться во всем, верить всему – два решения, одинаково удобные: и то и другое избавляет нас от необходимости размышлять.

Итак, вместо того чтобы произносить огульный приговор, мы должны тщательно исследовать роль гипотезы; мы узнаем тогда, что она не только необходима, но чаще всего и законна. Мы увидим также, что есть гипотезы разного рода: одни допускают проверку и, подтвержденные опытом, становятся плодотворными истинами; другие, не приводя нас к ошибкам, могут быть полезными, фиксируя нашу мысль; наконец, есть гипотезы, только кажущиеся таковыми, но сводящиеся к определениям или к замаскированным соглашениям.

Последние встречаются главным образом в науках математических и соприкасающихся с ними. Отсюда именно и происходит точность этих наук; эти условные положения представляют собой продукт свободной деятельности нашего ума, который в этой области не знает препятствий. Здесь наш ум может утверждать, так как он здесь предписывает; но его предписания налагаются на нашу науку, которая без них

была бы невозможна, они не налагаются на природу. Однако произвольны ли эти предписания? Нет; иначе они были бы бесплодны. Опыт предоставляет нам свободный выбор, но при этом он руководит нами, помогая выбрать путь, наиболее удобный. Наши предписания, следовательно, подобны предписаниям абсолютного, но мудрого правителя, который советуется со своим государственным советом.

Некоторые были поражены этим характером свободного соглашения, который выступает в некоторых основных началах наук. Они предались неумеренному обобщению и к тому же забыли, что свобода не есть произвол. Таким образом, они пришли к тому, что называется номинализмом, и пред ними возник вопрос, не одурачен ли ученый своими определениями и не является ли весь мир, который он думает открыть, простым созданием его прихоти<sup>1</sup>. При таких условиях наука была бы достоверна, но она была бы лишена значения.

Если бы это было так, наука была бы бессильна. Но мы постоянно видим перед своими глазами ее плодотворную работу. Этого не могло бы быть, если бы она не открывала нам чего-то реального; но то, что она может постичь, не суть вещи в себе, как думают наивные догматики, а лишь отношения между вещами; вне этих отношений нет познаваемой действительности.

Таково заключение, к которому мы придем; но для этого нам придется подвергнуть беглому обзору ряд наук от ариф-

---

<sup>1</sup> См. *Le Roy. Science et Philosophie // Revue de Métaphysique et de Morale*. 1901.

метики и геометрии до механики и экспериментальной физики.

Какова природа умозаключения в математике? Действительно ли она дедуктивна, как думают обыкновенно? Более глубокий анализ показывает нам, что это не так, – что в известной мере ей свойственна природа индуктивного умозаключения и потому-то она столь плодотворна. Но от этого она не теряет своего характера абсолютной строгости, что прежде всего мы и покажем.

Познакомившись ближе с одним из орудий, которые математика дает в руки естествоиспытателя, мы обратимся к анализу другого основного понятия – понятия математической величины. Находим ли мы ее в природе или сами вносим ее в природу? И в последнем случае не подвергаемся ли мы риску все извращать? Сличая грубые данные наших чувств и то крайне сложное и тонкое понятие, которое математики называют величиной, мы вынуждены признать их различие; следовательно, эту раму, в которую мы хотим заключить все, создали мы сами; но мы создали ее не наобум, мы создали ее, так сказать, по размеру и потому-то мы можем заключать в нее явления, не искажая в существенном их природы.

Другая рама, которую мы налагаем на мир, – это пространство. Откуда происходят первоначальные принципы геометрии? Предписываются ли они логикой? Лобачевский, создав неевклидовы геометрии, показал, что нет. Не открываем ли мы пространства при помощи наших чувств? Тоже

нет, так как то пространство, которому могут научить нас наши чувства, абсолютно отлично от пространства геометра. Проистекает ли вообще геометрия из опыта? Глубокое исследование покажет нам, что нет. Мы заключим отсюда, что эти принципы суть положения условные; но они не произвольны, и если бы мы были перенесены в другой мир (я называю его неевклидовым миром и стараюсь изобразить его), то мы остановились бы на других положениях.

В механике мы придем к аналогичным заключениям и увидим, что принципы этой науки, хотя и более непосредственно опираются на опыт, все-таки еще разделяют условный характер геометрических постулатов. До сих пор преобладает номинализм; но вот мы приходим к физическим наукам в собственном смысле. Здесь картина меняется; мы встречаем гипотезы иного рода и видим всю их плодотворность. Без сомнения, они с первого взгляда кажутся нам хрупкими, и история науки показывает нам, что они недолговечны; но они не умирают целиком, и от каждой из них нечто остается. Это нечто и надо стараться распознать, потому что здесь, и только здесь, лежит истинная реальность.

Метод физических наук основывается на индукции, заставляющей нас ожидать повторения какого-нибудь явления, когда воспроизводятся обстоятельства, при которых оно произошло в первый раз. Если бы могли повториться вместе все эти обстоятельства, то этот принцип мог бы быть применим без всякого опасения; но этого никогда не слу-

чится: всегда некоторые из обстоятельств будут отсутствовать. Абсолютно ли мы уверены, что они не имеют значения? Конечно, нет. Это может быть вероятно, но не может быть строго достоверно. Отсюда – значительная роль, которую играет в физических науках понятие вероятности. Таким образом, исчисление вероятностей не есть только забава или руководство для игроков в баккара, и мы должны стараться точнее обосновать его принципы. В этом отношении я мог дать лишь неполные результаты, поскольку тот неясный инстинкт, который руководит нами при решении вопроса о вероятности, мало поддается анализу.

Изучив условия, в которых работает физик, я счел нужным показать его за работой. Для этого я взял несколько примеров из истории оптики и электричества. Мы увидим, откуда вышли идеи Френеля, Максвелла и какие гипотезы бессознательно создавали Ампер и другие основатели электродинамики.

# Часть I. Число и величина

## Глава I. О природе математического умозаключения

### I

Самая возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергать сомнению? Если, напротив, все предложения, которые она выдвигает, могут быть выведены один из других по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии? Силлогизм не может нас научить ничему существенно новому, и если все должно вытекать из закона тождества, то все также должно к нему и приводиться. Но неужели возможно допустить, что изложение всех теорем, которые заполняют столько томов, есть не что иное, как замаскированный прием говорить, что  $A$  есть  $A$ !

Конечно, можно добраться до аксиом, которые лежат в ис-

точнике всех этих рассуждений. И если, с одной стороны, держаться того мнения, что их нельзя свести к закону противоречия, с другой – не желать видеть в них только факты опыта, которые не могли бы обладать характером математической необходимости, то имеется еще надежда отнести их к числу синтетических априорных суждений. Но это не значит разрешить затруднение; это значит только дать ему название: даже если бы природа синтетических суждений перестала быть для нас тайной, все же противоречие не было бы устранено, оно было бы только отодвинуто; силлогистическое умозаключение неспособно прибавить что-либо к тем данным, которые ему предоставляются; эти данные сводятся к нескольким аксиомам, и, кроме них, ничего нового нельзя было бы найти в заключениях.

Никакая теорема не должна была бы являться новой, если в ее доказательство не входила бы новая аксиома; умозаключение могло бы только возвращать нам истины, непосредственно очевидные, имеющие источником интуицию; оно являлось бы только промежуточным пустословием. Тогда, пожалуй, возник бы вопрос: не служит ли вообще силлогистический аппарат единственно для того, чтобы маскировать делаемые нами заимствования?

Противоречие поразит нас еще больше, если мы откроем какую-нибудь математическую книгу: на каждой странице автор будет выражать намерение обобщить уже известную теорему. Значит ли это, что математический метод ведет от

частного к общему, и каким образом можно называть его тогда дедуктивным?

Наконец, если бы наука о числе была чисто аналитической или могла вытекать аналитически из небольшого числа синтетических суждений, то достаточно сильный ум мог бы, по-видимому, с первого взгляда заметить все содержащиеся в них истины; более того: можно было бы даже надеяться, что когда-нибудь для их выражения будет изобретен язык настолько простой, что эти истины будут непосредственно доступны и заурядному уму.

Если отказаться от допущения этих выводов, то необходимо придется признать, что математическое умозаключение само в себе заключает род творческой силы и что, следовательно, оно отличается от силлогизма.

И отличие это должно быть глубоким. Так, например, мы не найдем ключа к тайне в многократном применении того правила, по которому одна и та же операция, одинаково примененная к двум равным числам, дает тождественные результаты.

Все эти формы умозаключения – все равно, приводимы ли они к силлогизму в собственном смысле или нет, – сохраняют аналитический характер и поэтому являются бессильными.

## II

Вопросы этого рода обсуждаются давно. Еще Лейбниц пытался доказать, что 2 да 2 составляют 4; рассмотрим вкратце его доказательство.

Я предполагаю, что определены число 1 и операция  $x + 1$ , состоящая в прибавлении 1 к данному числу  $x$ . Эти определения, каковы бы они ни были, не будут входить в последующие рассуждения.

Я определяю затем числа 2, 3 и 4 равенствами:

$$(1) 1 + 1 = 2; (2) 2 + 1 = 3; (3) 3 + 1 = 4.$$

Я определяю также операцию  $x + 2$  соотношением

$$(4) x + 2 = (x + 1) + 1.$$

Установив это, мы имеем

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \text{ (определение (4))},$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \text{ (определение (2))},$$

$$3 + 1 = 4 \text{ (определение (3))},$$

откуда

$$2 + 2 = 4 \text{ (что и требовалось доказать).}$$

Нельзя отрицать того, что это рассуждение является чисто аналитическим. Но спросите любого математика, и он вам скажет: «Это, собственно говоря, не доказательство, а проверка». Мы просто ограничились сближением двух чисто

условных определений и констатировали их тождество; ничего нового мы не узнали. Проверка тем именно и отличается от истинного доказательства, что, будучи чисто аналитической, она остается бесплодной. Она бесплодна, потому что заключение есть только перевод предпосылок на другой язык. Истинное же доказательство, наоборот, плодотворно, ибо в нем заключение является в некотором смысле более общим, чем посылки.

Равенство  $2 + 2 = 4$  могло подлежать проверке только потому, что оно является частным случаем. Всякое частное выражение в математике всегда может быть таким образом проверено. Но если бы математика должна была сводиться к ряду таких проверок, то она не была бы наукой. Ведь шахматист, например, не создает еще науки тем, что он выигрывает партию. Всякая наука есть наука об общем.

Можно даже сказать, что точные науки имеют своей задачей избавить нас от необходимости таких прямых проверок.

### *III*

Итак, посмотрим на математика за его делом и постараемся объяснить себе успешность его приемов. Задача эта не лишена трудностей; недостаточно открыть случайно попавшее сочинение и проанализировать там какое-нибудь доказательство.

Мы должны прежде всего исключить геометрию, где во-

прос усложняется трудными задачами, относящимися к роли постулатов, к природе и к происхождению понятия пространства. По аналогичным основаниям мы не можем обращаться и к анализу бесконечно малых. Нам надо искать математическую мысль там, где она осталась чистой, т. е. в арифметике.

Надо еще продолжить отбор; в высших отделах теории чисел первоначальные математические понятия подверглись столь глубокой разработке, что становится трудно их анализировать.

Следовательно, именно в началах арифметики мы должны надеяться найти искомое объяснение; но как раз в доказательстве наиболее элементарных теорем авторы классических сочинений обнаружили меньше всего точности и строгости. Не надо ставить им это в вину; они подчинялись необходимости; начинающие не подготовлены к настоящей математической строгости; они усмотрели бы в ней только пустые и скучные тонкости; было бы бесполезной тратой времени пытаться скорее внушить им большую требовательность; надо, чтобы они быстро, без остановок, прошли путь, который некогда медленно проходили основатели науки.

Почему же нужна столь продолжительная подготовка, чтобы привыкнуть к этой совершенной строгости, которая, кажется, должна была бы быть от природы присущей всякому нормальному уму? Это логическая и психологическая проблема, которая достойна обсуждения.

Но мы не будем останавливаться на ней; она является посторонней для нашего предмета. Я буду лишь помнить, что нам надо, из опасения не достигнуть цели, привести заново доказательства наиболее элементарных теорем и вместо той грубой формы, которую им придают, чтобы не утомить начинающих, придать такую, которая может удовлетворить ученого-математика.

Определение сложения. Я предполагаю, что предварительно была определена операция  $x + 1$ , состоящая в прибавлении числа 1 к данному числу  $x$ . Это определение, каково бы оно ни было, не будет играть никакой роли в последующих рассуждениях.

Дело идет теперь об определении операции  $x + a$ , состоящей в прибавлении числа  $a$  к данному числу  $x$ .

Предположим, что определена операция

$$x + (a - 1).$$

Тогда операция  $x + a$  будет определена равенством

$$x + a = [x + (a - 1)] + 1. \quad (1)$$

Таким образом, мы узнаем, что такое  $x + a$ , когда будем знать, что такое  $x + (a - 1)$ ; а так как я вначале предположил, что известно, что такое  $x + 1$ , то можно определить последовательными «рекурренциями» операции  $x + 2$ ,  $x + 3$  и т. д.<sup>2</sup>

Это определение заслуживает некоторого внимания, так

---

<sup>2</sup> Термином «рекурренция» (recurrence) обозначается логическая операция возврата к своему началу. — Прим. ред.

как оно имеет особенную природу, отличающую его от определения чисто логического; в самом деле, равенство (1) содержит бесчисленное множество различных определений, и каждое из них имеет смысл только тогда, когда известно другое, ему предшествующее.

Свойства сложения. *Ассоциативность.* Я утверждаю, что

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

В самом деле, теорема справедлива для  $c = 1$ ; в этом случае она изображается равенством

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

А это – помимо различия в обозначениях – есть не что иное, как равенство (1), при помощи которого я только что определял сложение.

Предположим, что теорема будет справедлива для  $c = \gamma$ ; я говорю, что она будет справедлива и для  $c = \gamma + 1$ ; пусть, в самом деле,

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

отсюда следует

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$$

или в силу определения (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

а это показывает с помощью ряда чисто аналитических выводов, что теорема верна для  $\gamma + 1$ .

Но так как она верна для  $c = 1$ , то последовательно усмат-

риваем, что она верна для  $c = 2$ , для  $c = 3$  и т. д.

*Коммутативность.* 1. Я утверждаю, что

$$a + 1 = 1 + a.$$

Теорема, очевидно, справедлива для  $a = 1$  путем чисто аналитических рассуждений можно проверить, что если она справедлива для  $a = \gamma$ , то она будет справедлива для  $a = \gamma + 1$ ; но раз она справедлива для  $a = 1$ , то она будет справедлива и для  $a = 2$ , для  $a = 3$  и т. д.; это выражают, говоря, что высказанное предложение доказано путем рекуррентии.

2. Я утверждаю, что

$$a + b = b + a.$$

Теорема только что была доказана для  $b = 1$ ; можно аналитически проверить, что если она справедлива для  $b = \beta$ , то она будет справедлива для  $b = \beta + 1$ .

Таким образом, предложение доказано путем рекуррентии.

Определение умножения. Мы определим умножение при помощи равенств

$$a \times 1 = a$$

$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a. (2)$$

Равенство (2), как и равенство (1), включает в себе бесчисленное множество определений; после того как дано определение  $a \times 1$ , оно позволяет определить по следовательно  $a \times 2$ ,  $a \times 3$  и т. д.

Свойства умножения. *Дистрибутивность.* Я утверждаю,

что

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Мы проверяем аналитически справедливость этого равенства для  $c = 1$ ; а потом проверяем, что если теорема справедлива для  $c = \gamma$ , то она будет справедлива и для  $c = \gamma + 1$ .

Предложение опять доказано рекурренцией.

*Коммутативность.* 1. Я утверждаю, что

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Теорема очевидна для  $a = 1$ .

Проверяем аналитически, что если она справедлива для  $a = \alpha$ , то она будет справедлива и для  $a = \alpha + 1$ .

2. Я утверждаю, что

$$a \times b = b \times a.$$

Теорема только что была доказана для  $b = 1$ . Аналитически проверяем, что если она справедлива для  $b = \beta$ , то она будет справедлива и для  $b = \beta + 1$ .

## IV

Здесь я прерываю этот монотонный ряд рассуждений. Но именно эта монотонность и способствовала лучшему выделению того однообразного процесса, который мы находим на каждом шагу.

Этот процесс есть доказательство путем рекурренции.

Сначала формулируется теорема для  $n = 1$ ; потом доказыва-  
ется, что если она справедлива для  $n - 1$ , то она справедлива  
и для  $n$ , и отсюда выводится заключение о справедливости  
ее для всех целых чисел.

Мы только что видели, как можно воспользоваться этим  
для доказательства правил сложения и умножения, т. е. пра-  
вил алгебраического вычисления; это вычисление есть ору-  
дие преобразования, которое применяется в гораздо боль-  
шем числе разнообразных комбинаций, чем простой силло-  
гизм; но это орудие еще чисто аналитическое, оно не способ-  
но научить нас ничему новому. Если бы математика не име-  
ла ничего другого, она тотчас же остановилась бы в своем  
развитии; но она получает новое средство в том же процес-  
се, т. е. в рассуждении путем рекуррентии, и потому может  
непрерывно продолжать свое поступательное движение.

В каждом шаге, если его хорошенько рассмотреть, мы на-  
ходим этот способ рассуждения – или в той простой форме,  
которую мы только что ему придали, или в форме более или  
менее видоизмененной.

В нем, следовательно, по преимуществу заключается ма-  
тематическое рассуждение, и нам следует изучить его ближе.

## V

Существенная черта умозаключения путем рекуррентии  
заключается в том, что оно содержит в себе бесчисленное

множество силлогизмов, сосредоточенных, так сказать, в одной формуле.

Чтобы лучше можно было себе это уяснить, я сейчас расположу эти силлогизмы один за другим в виде некоторого каскада. Это, в сущности, – гипотетические силлогизмы.

Теорема верна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то она справедлива для 2.

Следовательно, она верна для 2.

Если же она верна для 2, то она верна для 3.

Следовательно, она верна для 3 и т. д.

Очевидно, что заключение каждого силлогизма служит следующему меньшей посылкой.

Большие посылки всех наших силлогизмов могут быть приведены к одной формуле:

Если теорема справедлива для  $n - 1$ , то она справедлива для  $n$ .

Таким образом, очевидно, что в рассуждении путем рекуррентности ограничиваются выражением меньшей посылки первого силлогизма и общей формулы, которая в виде частных случаев содержит в себе все большие посылки.

Этот никогда не оканчивающийся ряд силлогизмов оказывается приведенным к одной фразе в несколько строк.

Теперь легко понять, почему всякое частное следствие, вытекающее из теоремы, может быть, как я изложил выше, проверено чисто аналитическим процессом.

Если, вместо того чтобы доказывать справедливость на-

шей теоремы для всех чисел, мы желаем обнаружить ее справедливость, например, только для числа 6, для нас будет достаточно обосновать 5 первых силлогизмов нашего последовательного ряда; если бы мы пожелали доказать теорему для числа 10, надо было бы взять их 9; для большого числа надо было бы взять их еще больше; но как бы велико ни было это число, мы всегда в конце концов его достигли бы, и аналитическая проверка была бы возможна.

Однако как бы далеко мы ни шли, мы никогда не могли бы прийти до общей применимой ко всем числам теоремы, которая одна только и может быть предметом науки. Чтобы ее достигнуть, понадобилось бы бесконечно большое число силлогизмов – нужно перескочить бездну, которую никогда не будет в состоянии заполнить терпение аналитика, ограниченное одними средствами формальной логики.

Вначале я поставил вопрос, почему нельзя было бы вообразить ум, достаточно мощный для того, чтобы сразу подметить всю совокупность математических истин.

Ответ теперь нетруден; шахматный игрок может рассчитать вперед четыре, пять ходов, но, каким бы необыкновенным его ни представляли, он всегда предусмотрит только конечное число ходов; если он применит свои способности к арифметике, то он не будет в состоянии подметить в ней общих истин путем одной непосредственной интуиции; он не будет в состоянии обойтись без помощи рассуждения путем рекуррентности при доказательстве самой незначительной тео-

ремы, ибо это и есть то орудие, которое позволяет переходить от конечного к бесконечному.

Это орудие всегда полезно, ибо оно позволяет нам сразу пройти любое число ступеней и избавляет нас от долгих, скучных и однообразных проверок, которые скоро стали бы практически невыполнимыми.

Но оно делается неизбежным, раз мы имеем в виду общую теорему, к которой аналитическая проверка нас непрерывно приближала бы, никогда не позволяя ее достигнуть.

В этой области арифметики кто-нибудь, пожалуй, счел бы себя далеким от анализа бесконечно малых; между тем мы сейчас видели, что идея математической бесконечности уже здесь играет весьма важную роль, и без нее не было бы арифметики как науки, так как не было бы идеи общего.

## VI

Суждение, на котором основан способ рекурренций, может быть изложено в других формах; можно сказать, например, что в бесконечно большом собрании различных целых чисел всегда есть одно, которое меньше всех других. Можно легко переходить от одного выражения к другому и таким образом создавать иллюзию доказательства законности рассуждения путем рекурренции. Но в конце концов всегда придется остановиться; мы всегда придем к недоказуемой аксиоме, которая, в сущности, будет не что иное, как предложе-

ние, подлежащее доказательству, но только переведенное на другой язык.

Таким образом, нельзя не прийти к заключению, что способ рассуждения путем рекуррентии несводим к закону противоречия.

Это правило не может происходить и из опыта; опыт нас может научить только тому, что это правило справедливо, например, для 10, для 100 первых чисел; он не может простираться на бесконечный ряд чисел, а лишь на большую или меньшую часть этого ряда, всегда ограниченную.

Если бы дело шло только об этом, закон противоречия был бы достаточен – он всегда позволил бы нам развить столько силлогизмов, сколько мы желаем; лишь когда дело идет об охвате бесконечности одной формулой, лишь перед бесконечным рушится этот закон; но там становится бессилён и опыт. Это правило, недоступное ни для аналитического, ни для опытного доказательства, есть истинный образец синтетического априорного суждения. С другой стороны, нельзя видеть в нем только соглашение, как в некоторых постулатах геометрии.

Почему же это суждение стоит перед нами с непреодолимой очевидностью? Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды. В силу этого могущества разум обладает непосредственной интуицией, а опыт может быть для него

только поводом воспользоваться ею и осознать ее.

Но скажут: если чистый опыт не может оправдать суждения путем рекуррентии, то будет ли то же самое относительно опыта, поддерживаемого индукцией? Мы последовательно видим, что теорема верна для чисел 1, 2, 3 и т. д.; мы говорим: закон очевиден, и присваиваем ему тот же ранг, какой свойствен всякому физическому закону, опирающемуся на наблюдения, число которых очень велико, но все же ограничено.

Нельзя не признать, что здесь существует поразительная аналогия с обычными способами индукции. Однако есть и существенное различие. Индукция, применяемая в физических науках, всегда недостоверна, потому что она опирается на веру во всеобщий порядок Вселенной – порядок, который находится вне нас. Индукция математическая, т. е. доказательство путем рекуррентии, напротив, представляется с необходимостью, потому что она есть только подтверждение одного из свойств самого разума.

## VII

Выше я сказал, что математики стараются всегда обобщать полученные ими предложения; например, мы только что доказали равенство

$$a + 1 = 1 + a,$$

а затем воспользовались им для обоснования равенства

$$a + b = b + a,$$

которое, очевидно, является более общим.

Таким образом, математика, как и другие науки, может идти от частного к общему.

Это – факт, который в начале этого сочинения казался нам непонятным, но который теряет всю таинственность для нас, после того как была установлена аналогия между доказательством путем рекуррентности и между обычной индукцией.

Нет сомнения, что математическое рассуждение посредством рекуррентности и индуктивное физическое рассуждение покоятся на различных основаниях; но ход их параллелен – они движутся в том же направлении, т. е. от частного к общему.

Рассмотрим это несколько ближе. Чтобы доказать равенство

$$a + 2 = 2 + a,$$

нам достаточно применить два раза правило

$$a + 1 = 1 + a (1)$$

и написать

$$a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a (2).$$

Однако равенство (2), выведенное таким образом чисто аналитически из равенства (1), не есть просто его частный случай: это нечто иное.

Поэтому нельзя сказать, что мы даже в действительно аналитической и дедуктивной части математических рассуждений двигались от общего к частному в обычном смысле слова.

Два члена равенства (2) суть просто сочетания, более сложные, чем два члена равенства (1), и анализ служит только для отделения элементов, которые входят в эти сочетания, и для изучения их соотношений.

Следовательно, математики действуют, применяя процесс «конструирования»; они «конструируют» сочетания все более и более сложные. Возвращаясь затем путем анализа этих сочетаний – этих, так сказать, совокупностей – к их первоначальным элементам, они раскрывают отношения этих элементов и выводят отсюда отношения самих совокупностей.

Это – процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному, ибо совокупности, очевидно, не могут быть рассматриваемы как нечто более частное, чем их составные элементы.

Этому процессу «конструирования» справедливо приписывали большое значение и желали в нем видеть необходимое и достаточное условие прогресса точных наук.

Несомненно, что оно необходимо; но оно не является достаточным.

Для того чтобы конструирование могло быть полезным, чтобы оно не было бесплодным трудом для разума, чтобы оно могло служить опорой для дальнейшего поступательно-

го движения, надо, чтобы оно прежде всего обладало некоторым родом единства, которое позволяло бы видеть в нем нечто иное, чем простое наращивание составных частей. Говоря точнее, надо, чтобы в анализе конструкции выявлялось некоторое преимущество сравнительно с анализом ее составных элементов.

В чем же может заключаться это преимущество?

Зачем, например, надо рассуждать не об элементарных треугольниках, а о многоугольнике, который ведь всегда разложим на треугольники?

Это делается потому, что существуют свойства, принадлежащие многоугольникам с каким угодно числом сторон, которые можно непосредственно применить к любому частному многоугольнику.

Весьма часто, напротив, только ценой продолжительных усилий можно бывает найти эти свойства, изучая непосредственно соотношения элементарных треугольников. Знание общей теоремы освобождает нас от этих усилий.

Если четырехугольник есть не что иное, чем соединенные рядом два треугольника, то это потому, что он принадлежит к роду многоугольников.

Конструирование становится интересным только тогда, когда его можно сравнить с другими аналогичными конструкциями, образующими виды того же родового понятия.

Необходимо еще, чтобы было возможно доказывать родовые свойства, не будучи вынужденным обосновывать их по-

следовательно для каждого вида.

Чтобы достигнуть этого, необходимо вновь подняться от частного к общему, пройдя одну или несколько ступеней.

Аналитический процесс «конструирования» не вынуждает нас опускаться ниже, а оставляет все на том же уровне.

Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилён создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга.

## **Глава II. Математическая величина и опыт**

Если вы хотите знать, что понимают математики под непрерывностью, то ответа следует спрашивать не у геометра. Геометр всегда так или иначе старается представить себе фигуры, которые он изучает, но его представления являются для него только орудием; занимаясь геометрией, он употребляет пространство так же, как употребляет мел; поэто-

му следует остерегаться приписывать слишком большое значение случайностям, которые часто имеют не больше значения, чем белизна мела.

Чистому аналитику нечего бояться этой опасности. Он освободил математическую науку от всех посторонних элементов и может ответить на ваш вопрос: что представляет собой на самом деле та непрерывность, о которой рассуждают математики? Многие из них, умеющие размышлять о своей науке, уже сделали это, как, например, Таннери в своем «Введении в теорию функций одной переменной».

Будем исходить из последовательности целых чисел; между двумя соседними числами вставим одно или несколько промежуточных чисел, потом между этими числами вставим еще новые и так далее до бесконечности. Мы будем иметь, таким образом, неограниченное число членов: это будут числа, называемые дробно-рациональными или соизмеримыми. Но этого еще недостаточно; между этими членами, число которых, однако, уже бесконечно, надо вставить еще другие, так называемые иррациональные или несоизмеримые.

Прежде чем идти дальше, сделаем одно важное замечание. Непрерывность, понимаемая таким образом, есть не более чем собрание отдельных единиц, расположенных в известном порядке, правда, в бесконечном числе, но внешних друг другу. Это не соответствует обычной концепции, которая между элементами непрерывного предполагает некоторый род внутренней связи, составляющей из них целое, —

где не точка предшествует существованию линии, а линия предшествует существованию точки. От знаменитой формулы: непрерывность есть единство во множественности – остается только множественность; единство исчезло. Это обстоятельство не лишает аналитиков основания определять свою непрерывность так, как они это делают, ибо, рассуждая именно об этом, они постоянно спорят друг с другом по поводу строгости. Но для нас достаточно указать, что настоящая математическая непрерывность есть нечто совсем иное, чем непрерывность физиков или непрерывность метафизиков.

Быть может, скажут, что математики, которые довольствуются этим определением, обмануты словами, что надо было бы точно сказать, что представляет собой каждый из промежуточных членов, выяснить, как надо их вставить, и показать, что эта операция возможна. Но это было бы несправедливо; единственным свойством этих членов, входящим в рассуждения о них<sup>3</sup>, является свойство находиться прежде или после таких-то других членов; поэтому оно только и должно входить в их определение.

Таким образом, нечего беспокоиться о том, каким способом следует вставлять промежуточные члены; с другой стороны, никто не усомнится, что эта операция возможна, если только не забывать, что это последнее слово на математиче-

---

<sup>3</sup> Сюда входят специальные соглашения, служащие для определения сложения; о них мы будем говорить ниже.

ском языке означает просто: свободна от противоречия.

Все же наше определение непрерывности не полно, и я возвращаюсь к нему после этого слишком длинного отступления.

**Определение несоизмеримых величин.** Математики Берлинской школы, и в частности Кронекер, занимаются построением этой непрерывной последовательности дробных и иррациональных чисел, не пользуясь никаким другим материалом, кроме целого числа. С этой точки зрения математическая непрерывность явится чистым созданием разума, в котором опыт совершенно не участвует.

Понятие рационального числа для них не представляет затруднения; предмет их особенных усилий служит определение несоизмеримого числа. Но прежде чем воспроизвести здесь это определение, я должен сделать одно замечание, чтобы предупредить удивление, которое оно не замедлило бы вызвать у читателей, мало знакомых с математическими обычаями.

Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения. Для них не важно материальное содержание; их интересует только форма.

Кто забудет это, тот не поймет, что Дедекинд под именем несоизмеримого числа понимает простой символ, т. е. нечто, совершенно отличное от представления, которое создают се-

бе обыкновенно относительно величины, считая ее измеримой, почти осязаемой.

Итак, вот каково определение Дедекинда: соизмеримые числа могут быть бесконечным числом способов распределены на два класса при соблюдении условия, что любое число первого класса должно быть больше любого числа второго класса.

Может случиться, что между числами первого класса будет одно, которое меньше всех других; например, если поместим в первый класс все числа, большие чем 2, и само 2, а во второй класс – все числа, меньшие чем 2, то ясно, что 2 будет наименьшее из всех чисел первого класса. Число 2 может быть принято в качестве символа этого распределения.

Можно представить себе, напротив, что между числами второго класса имеется одно, большее всех других; так, это имеет место, если первый класс включает все числа, большие чем 2, а второй – все числа, меньшие чем 2, и само 2. Здесь опять число 2 могло бы быть избрано как символ этого распределения.

Но может также случиться, что нельзя будет найти ни в первом классе число, меньшее чем все другие, ни во втором – число, большее чем все другие. Предположим, например, что в первом классе помещают все соизмеримые числа, квадрат которых больше чем 2, а во втором все те, квадрат которых меньше чем 2. Известно, что нет такого числа, квадрат которого в точности был бы равен 2. И в первом классе

не будет, очевидно, числа, меньшего чем все другие, потому что, как бы ни был квадрат некоторого числа близок к 2, всегда можно найти соизмеримое число, квадрат которого будет еще ближе к 2.

С точки зрения Дедекинда, несоизмеримое число  $\sqrt{2}$  есть не что иное, как символ этого особого способа распределения соизмеримых чисел; таким образом, каждому способу распределения соответствует одно число – соизмеримое или несоизмеримое, – которое и служит символом распределения.

Но удовольствоваться этим значило бы совсем забыть о происхождении этих символов; остается еще выяснить, каким образом математики пришли к тому, что приписали им особого рода конкретное существование, и, с другой стороны, не появляется ли трудность уже и в отношении дробных чисел? Могли бы мы иметь понятие об этих числах, если бы заранее не знали о материи, которую мы понимаем как нечто делимое до бесконечности, т. е. как непрерывность?

**Физическая непрерывность.** Итак, возникает вопрос, не заимствовано ли понятие математической непрерывности просто из опыта. Если бы это было так, то это означало бы, что данные непосредственного опыта, каковыми являются наши ощущения, доступны измерению.

Может явиться искушение поверить, что это и в самом деле так, потому что в последнее время пытались измерить их, и был даже сформулирован закон, известный под именем

закона Фехнера, по которому ощущение пропорционально логарифму раздражения.

Но если ближе присмотреться к опытам, которыми пытались обосновать этот закон, то можно прийти к совершенно противоположному заключению. Например, было замечено, что вес  $A$ , равный 10 граммам, и вес  $B$ , равный 11 граммам, производят тождественные ощущения, что вес  $B$  нельзя отличить от веса  $C$ , равного 12 граммам; но что вес  $A$  можно легко отличить от веса  $C$ . Таким образом, непосредственные результаты опыта могут быть выражены следующими соотношениями:

$$A = B, B = C, A < C,$$

которые можно рассматривать как формулу физической непрерывности. Эта формула включает в себе недопустимое разногласие с законом противоречия; необходимость избежать его и заставила нас изобрести идею математической непрерывности.

Итак, необходимо заключить, что это понятие всецело создано разумом, но что опыт доставил ему повод для этого.

Мы не можем допустить, что два количества, равные одному и тому же третьему, не равны между собой; и это обстоятельство вынуждает нас предположить, что  $A$  отличается от  $B$  и  $B$  от  $C$ , но несовершенство наших чувств не позволило нам этого заметить.

**Создание математической непрерывности.** *Первая стадия.* До сих пор, чтобы изобразить действительность,

нам достаточно было бы вставить между  $A$  и  $B$  небольшое число отдельных членов. Но что произойдет, если мы для возмещения несовершенства наших чувств прибегнем к какому-нибудь инструменту, например, если мы воспользуемся микроскопом? Члены  $A$  и  $B$ , которых ранее мы не могли отличить друг от друга, теперь нам представлятся различными; но между  $A$  и  $B$ , которые стали различимыми, поместится новый член  $D$ , который мы не будем в состоянии отличить ни от  $A$ , ни от  $B$ . Несмотря на употребление самых совершенных методов, непосредственные результаты нашего опыта будут всегда сохранять свойства физической непрерывности с присущим ей противоречием.

Мы освободимся от этого противоречия только тем, что будем беспрестанно помещать новые члены между членами, уже *различенными*, и эта операция должна будет продолжаться до бесконечности. Мы могли бы подумать, что она будет остановлена, если мы представим себе некое орудие, достаточно мощное для разложения физической непрерывности на отдельные элементы, подобно тому как телескоп разлагает Млечный Путь на звезды. Но мы не можем так думать. В самом деле, инструментами мы пользуемся всегда при помощи наших чувств; так, увеличенное микроскопом изображение мы рассматриваем нашим глазом, следовательно, оно должно всегда сохранять характер зрительного ощущения, а потому сохранять и характер физической непрерывности.

Длина, рассматриваемая непосредственно, ничем не от-

личается от половины этой длины, удвоенной микроскопом. Целое однородно с частью; здесь заключается новое противоречие, или скорее это было бы противоречием, если бы число членов предполагалось конечным; в самом деле, ясно, что часть, которая содержит менее членов сравнительно с целым, не может быть подобной целому.

Противоречие снимается лишь тогда, когда число членов рассматривается как бесконечное; ничто, например, не мешает рассматривать совокупность целых чисел подобной совокупности четных чисел, которая представляет собою, однако, только часть всего ряда; в самом деле, каждому целому числу соответствует в этом ряду одно четное число, которым является то же число, увеличенное вдвое.

Однако разум приходит к созданию понятия о непрерывном, образованном из бесконечного числа членов, не только для того, чтобы избавиться от этого противоречия, содержащегося в эмпирических данных.

Дело обстоит совершенно так же, как для ряда целых чисел. Мы обладаем способностью понять, что единица может быть прибавлена к собранию единиц; благодаря опыту мы имеем повод упражнять эту способность и сознавать ее; но с этого момента мы чувствуем, что наше могущество не имеет предела и что мы могли бы считать бесконечно, хотя бы и имели для счета всегда только конечное число предметов,

Точно так же, как только мы пришли к идее поместить между двумя последовательными членами некоторого ряда

промежуточные члены, мы пришли к выводу, что эта операция может быть продолжена беспрестанно и что нет, так сказать, никакого существенного основания для остановки.

Я позволю себе упростить речь, назвав математической непрерывностью первого порядка всякую совокупность членов, образованных по тому же закону, что и последовательность соизмеримых чисел. Если мы затем поместим в ней новые промежуточные члены, следуя закону образования несоизмеримых чисел, мы получим то, что мы назовем непрерывностью второго порядка.

*Вторая стадия.* До сих пор мы сделали только первый шаг: мы объяснили происхождение непрерывностей первого порядка; теперь надо убедиться, почему их было еще недостаточно и почему понадобилось изобретать несоизмеримые числа.

Если мы хотим представить себе линию, то это возможно сделать, только пользуясь свойствами физической непрерывности; т. е. ее можно представить себе не иначе, как обладающей некоторой шириной. Две линии явятся для нас тогда в форме двух узких полос, и если удовольствоваться этим грубым изображением, то очевидно, что при пересечении две линии будут иметь общую часть.

Но чистый геометр делает еще одно усилие: не отказываясь совершенно от помощи своих чувств, он хочет дойти до понятия линии без ширины, точки без протяжения. Он может достичь этого, только рассматривая линию как предел, к

которому стремится полоса, все более и более суживающаяся, и точку – как предел, к которому стремится площадь, все более и более уменьшающаяся. Тогда наши две полосы, как бы узки они ни были, всегда будут иметь общую площадь, тем меньшую, чем меньше будет их ширина, и пределом ее будет то, что чистый геометр называет точкой.

Вот почему говорят, что две пересекающиеся линии имеют общую точку, и эта истина представляется интуитивной.

Но она содержала бы противоречие, если бы понимать линии как непрерывности первого порядка, т. е. если на линиях, проводимых геометром, должны находиться только точки, координаты которых – рациональные числа. Противоречие станет очевидным, лишь только установят, например, существование прямых и кругов.

В самом деле, ясно, что если бы в качестве действительных рассматривались только точки с соизмеримыми координатами, то круг, вписанный в квадрат, и диагональ этого квадрата не пересекались бы, потому что координаты точки их пересечения несоизмеримы.

Этого еще недостаточно, потому что таким образом мы имели бы не все несоизмеримые числа, а только некоторые из них.

Но представим себе прямую, разделенную на две полупрямые. Каждая из этих полупрямых явится в нашем воображении как полоса известной ширины; притом эти полосы будут покрывать одна другую, потому что между ни-

ми не должно быть никакого промежутка. Когда мы пожелаем воображать наши полосы все более и более узкими, общая часть представится нам точкой, которая будет существовать постоянно; так что мы допустим в качестве интуитивной истины, что если прямая разделена на две полупрямые, то общая граница этих двух прямых есть точка; мы узнаем здесь концепцию Кронекера, согласно которой несоизмеримое число рассматривается как граница, общая двум классам рациональных чисел.

Таково происхождение непрерывности второго порядка, которая и является математической непрерывностью в собственном смысле.

*Вывод.* В итоге можно сказать, что разум обладает способностью создавать символы; благодаря этой способности он построил математическую непрерывность, *которая представляет собой только особую систему символов.* Его могущество ограничено лишь необходимостью избегать всякого противоречия; однако разум пользуется своей силой исключительно в том случае, когда опыт доставляет ему для этого основание.

В занимающем нас случае этим основанием было понятие физической непрерывности, выведенное из непосредственных данных чувственного восприятия.

Но это понятие приводит к ряду противоречий, от которых надо последовательно освобождаться. Таким образом, мы вынуждены воображать все более и более усложненную

систему символов. Та система, на которой мы, наконец, останавливаемся, не только свободна от внутреннего противоречия – ведь она уже оказалась такой на всех пройденных этапах, – но она также не противоречит различным так называемым интуитивным положениям, которые извлечены из более или менее обработанных эмпирических понятий.

**Измеримая величина.** Величины, которые мы изучали до сих пор, не были *измеримыми*, мы умели сказать, которая из двух величин является большей, но в два ли, в три ли раза она больше – этого мы не умели сказать.

В самом деле, до сих пор я занимался только порядком, в котором наши члены были размещены. Но для большинства применений этого недостаточно. Надо научиться сравнивать промежутки, отделяющие два каких-нибудь члена. Только при этом условии непрерывность делается измеримой и в ней оказывается возможным применить арифметические операции.

Это можно сделать только при помощи нового и особого соглашения. Условливаются, что в таком-то случае интервал, заключенный между членами  $A$  и  $B$ , равен интервалу, отделяющему  $C$  от  $D$ . Так, в начале нашей работы мы исходили из последовательности целых чисел и предполагали, что между двумя последовательными членами ее помещены  $n$  промежуточных; эти-то новые члены будут теперь в силу соглашения рассматриваться как равноотстоящие.

Отсюда-то и вытекает способ определения сложения двух

величин; так, если интервал  $AB$  по определению равен интервалу  $CD$ , то интервал  $AD$  по определению будет суммой интервалов  $AB$  и  $CD$ .

Это определение в весьма значительной мере произвольно. Однако оно произвольно не вполне. Оно подчинено известным соглашениям, например, правилам коммутативности и ассоциативности сложения. Но как только выбранное определение удовлетворяет этим правилам, выбор делается безразличным, а более точное определение – бесполезным.

**Различные замечания.** Мы можем поставить перед собой несколько важных вопросов:

1. Исчерпывается ли творческое могущество разума созданием математической непрерывности?

Нет: труды Дюбуа-Реймона служат поразительным доказательством этого.

Известно, что математики различают бесконечно малые разных порядков, так что бесконечно малые второго порядка не только бесконечно малы в абсолютном смысле, но еще и являются таковыми по отношению к бесконечно малым первого порядка. Нетрудно представить себе бесконечно малые дробного и даже иррационального порядка, и, таким образом, мы снова находим ту последовательность математической непрерывности, которой посвящены предшествующие страницы. Более того: существуют такие бесконечно малые величины, которые бесконечно малы по отношению к бесконечно малым первого порядка и, напротив, бесконечно ве-

лики по отношению к бесконечно малым порядка  $1 + \varepsilon$ , как бы ни было мало  $\varepsilon$ . Итак, вот еще новые члены, разместившиеся в нашем ряду; и если мне будет позволено вернуться к терминологии, которой я недавно держался и которая является достаточно удобной, хотя еще и не используется широко, я скажу, что этим создан вид непрерывности третьего порядка.

Легко было бы идти дальше, но это было бы бесполезной игрой ума; пришлось бы воображать себе одни символы без возможности их применения; на это никто не отважится. Даже непрерывность третьего порядка, к которой приводит рассмотрение различных порядков бесконечно малых, сама по себе является слишком мало полезной, чтобы приобрести право быть упоминаемой, и геометры рассматривают ее только просто как курьез. Разум пользуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому.

2. Раз мы обладаем понятием математической непрерывности, гарантированы ли мы от противоречий, аналогичных тем, которые положили начало этому понятию?

Нет; и я сейчас дам этому пример.

Надо быть очень сведущим, чтобы не считать очевидным, что каждая кривая имеет касательную: и в самом деле, если представлять себе эту кривую и некоторую прямую как две узкие полосы, то всегда можно расположить их так, что они будут иметь общую часть, не пересекаясь. Теперь вообразим себе, что ширина этих двух полос бесконечно уменьшается;

существование их общей части будет всегда возможным, и в пределе, так сказать, две линии будут иметь общую точку, не пересекаясь, т. е. они будут взаимно касаться друг друга.

Геометр, рассуждающий таким образом, сделал бы – сознательно или нет – то же самое, что мы сделали раньше, желая доказать, что две пересекающиеся линии имеют общую точку; и его интуиция могла бы показаться такой же законной.

Между тем она его обманула бы. Можно доказать, что существуют кривые, не имеющие касательных, если эта кривая определена как аналитическая непрерывность второго порядка.

Несомненно, какая-нибудь уловка, аналогичная ранее изученным нами, позволила бы устранить противоречие, но так как оно встречается только в весьма исключительных случаях, то им и не занимаются. Вместо того чтобы стараться примирить интуицию с анализом, удовлетвоались тем, что пожертвовали одним из двух; и так как анализ должен остаться непогрешимым, то всю вину отнесли на счет интуиции.

**Физическая непрерывность нескольких измерений.** Выше я исследовал физическую непрерывность такую, какой она вытекает из непосредственных данных наших чувств или, если угодно, из прямых результатов опытов Фехнера; я показал, что эти результаты резюмируются противоречивыми формулами

$$A = B, B = C, A < C.$$

Посмотрим теперь, как это понятие было обобщено и как оказалось возможным вывести из него понятие непрерывностей многих измерений.

Рассмотрим две любые группы ощущений. Мы или будем в состоянии различить их, или нет, подобно тому как в опытах Фехнера вес в 10 граммов можно было отличить от веса в 12 граммов, но не от веса в 11 граммов. Ничего другого не нужно для построения непрерывности многих измерений.

Назовем элементом одну из этих групп ощущений. Это будет нечто аналогичное математической точке, однако не совсем то же самое. Мы не можем определить размеры нашего элемента, так как мы не умеем отличить его от соседних элементов, он как бы окутан туманом. Если бы можно было употребить астрономическое сравнение, наши «элементы» были бы подобны туманностям, между тем как математические точки уподоблялись бы звездам.

Если так, то система элементов образует непрерывность, раз есть возможность перейти от любого из них к какому угодно другому через ряд последовательных элементов – таких, что каждый из них не мог бы быть различен от предыдущего. Этот линейный ряд является по отношению к линии математика тем же, чем является изолированный элемент по отношению к точке.

Прежде чем идти дальше, я должен разъяснить, что такое купюра. Рассмотрим непрерывность  $C$  и возьмем у нее неко-

торые из ее элементов, которые на одно мгновение будем рассматривать не принадлежащими больше к этой непрерывности. Совокупность элементов, взятых таким образом, будет называться купюрой. Может статься, что вследствие этой операции  $C$  окажется подразделенной на несколько отдельных непрерывностей, так как совокупность остающихся элементов не будет более составлять единую непрерывность.

Тогда у  $C$  найдутся два элемента  $A$  и  $B$ , которые необходимо будет считать принадлежащими двум различным непрерывностям; мы узнаем это потому, что нельзя будет найти в  $C$  линейный ряд последовательных элементов (каждый из этих элементов не может отличаться от предыдущего; за первый возьмем  $A$ , а за последний  $B$ ), если хоть один из элементов этого ряда не будет неотличим от одного из элементов купюры.

Может, напротив, случиться, что реализация купюры будет недостаточна для подразделения непрерывности  $C$ . В целях классификации физических непрерывностей мы должны исследовать, каковы должны быть купюры, которые необходимы для подразделения непрерывности.

Если физическую непрерывность  $C$  можно подразделить, реализуя купюру, состоящую из конечного числа различных один от другого элементов (и не образующую ни одной непрерывности, ни нескольких непрерывностей), то мы скажем, что  $C$  есть непрерывность одного измерения.

Если, напротив, можно подразделить  $C$  только при помо-

щи купюр, которые сами представляют собой непрерывности, то мы скажем, что  $C$  – непрерывность нескольких измерений. Если это достигается купюрами, которые являются непрерывностями одного измерения, то мы скажем, что  $C$  имеет два измерения; если достаточно купюр, имеющих два измерения, то мы скажем, что  $C$  имеет три измерения, и т. д.

Таким образом, понятие физической непрерывности многих измерений оказывается определенным благодаря тому весьма простому факту, что две группы ощущений могут быть различимыми или же неразличимыми.

**Математическая непрерывность нескольких измерений.** Понятие математической непрерывности  $n$  измерений вытекает отсюда совершенно естественно при помощи процесса, вполне подобного тому, который мы изучили в начале этой главы. Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы  $n$  различных величин, называемых ее координатами.

Не всегда необходимо, чтобы величины эти были измеримыми. В геометрии имеется целая отрасль, в которой отвлекаются от измерения этих величин; в ней занимаются, например, только изучением вопроса, лежит ли точка  $B$  на кривой  $ABC$  между точками  $A$  и  $C$ , и не стараются узнать, равна ли дуга  $AB$  дуге  $BC$ , или она в два раза больше ее. Это – так называемый *Analysis Situs*.

В этом вся сущность учения, привлекшего к себе внимание величайших геометров, учения, из которого вытекает

ряд замечательных теорем. Эти теоремы отличаются от теорем обыкновенной геометрии тем, что они являются чисто качественными, и они остались бы справедливыми, если бы фигуры копировались искусным чертежником, который грубо нарушал бы их пропорции и заменял бы прямые линии более или менее искривленными.

Когда в только что определенную нами непрерывность пожелаем ввести меру, эта непрерывность превратилась в пространство: родилась геометрия. Но я откладываю это исследование для второй части.

## Часть II. Пространство

### Глава III. Неевклидовы геометрические системы

Всякое заключение предполагает наличие посылок; посылки же эти или сами по себе очевидны и не нуждаются в доказательстве, или могут быть установлены, только опираясь на другие предположения. Но так как этот процесс не может продолжаться беспредельно, то всякая дедуктивная наука, и в частности геометрия, должна основываться на некотором числе недоказуемых аксиом. Поэтому все руководства по геометрии прежде всего излагают эти аксиомы. Но между этими аксиомами приходится делать различие; некоторые из них, как, например, аксиома: «две величины, равные одной и той же третьей, равны между собой», суть предложения не геометрии, а анализа. Я рассматриваю их как аналитические априорные суждения и не буду заниматься ими. Но я должен остановиться на других аксиомах, которые относятся к геометрии. Большинство руководств излагают три такие аксиомы:

1. Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.
2. Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точ-

ками.

3. Через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.

Хотя вообще и обходятся без доказательства второй из этих аксиом, но было бы возможно вывести ее из двух остальных и из тех гораздо более многочисленных аксиом, которые допускаются скрыто, как я выясню это далее.

Долгое время тщательно искали доказательства третьей аксиомы, известной под названием постулата Евклида. Сколько было потрачено сил в этой химерической надежде, положительно не поддается описанию. Наконец, в начале прошлого столетия и почти одновременно двое ученых, русский – Лобачевский и венгерский – Бояи, установили неопровержимо, что это доказательство невозможно; этим они почти совсем избавили нас от изобретателей геометрии без постулата Евклида; с тех пор парижская Академия наук получает не более одного-двух новых доказательств в год. Но вопрос не был исчерпан; его разработка не замедлила сделать новый большой шаг с опубликованием знаменитого мемуара Римана «*Ober die Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen*»<sup>4</sup>. Эта маленькая работа вызвала к жизни большинство новых работ, о которых я буду говорить дальше и среди которых следует назвать работы Бельтрами и Гельмгольца.

---

<sup>4</sup> *Analysis Situs* – анализ положения, в современной терминологии – топология. – *Прим. ред.*

**Геометрия Лобачевского.** Если бы возможно было вывести постулат Евклида из других аксиом, то, отбрасывая этот постулат и допуская другие аксиомы, мы, очевидно, должны были бы прийти к следствию, заключающему в себе противоречие; поэтому было бы невозможно на таких положениях построить цельную геометрическую систему.

Но как раз это и сделал Лобачевский. Он допускает сначала, что *через точку можно провести несколько прямых, параллельных данной прямой.*

Кроме этой, все другие аксиомы Евклида он сохраняет. Из этих гипотез он выводит ряд теорем, между которыми нельзя указать никакого противоречия, и строит геометрию, непогрешимая логика которой ни в чем не уступает евклидовой геометрии. Теоремы, конечно, весьма отличаются от тех, к которым мы привыкли, и вначале кажутся несколько странными.

Так, сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых углов; разность между этой суммой и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника.

Невозможно построить фигуру, подобную данной, но имеющую иные размеры.

Если разделить окружность на  $n$  равных частей и провести в точках деления касательные, то эти  $n$  касательных образуют многоугольник, если радиус окружности достаточно мал; но если этот радиус достаточно велик, они не встретятся.

Бесполезно было бы увеличивать число этих примеров;

теоремы Лобачевского не имеют никакого отношения к евклидовым, но тем не менее они логически связаны между собой.

**Геометрия Римана.** Вообразим себе мир, заселенный исключительно существами, лишенными толщины, и предположим, что эти «бесконечно плоские» существа расположены все в одной плоскости и не могут из нее выйти. Допустим далее, что этот мир достаточно удален от других миров, чтобы не подвергаться их влиянию. Раз мы начали делать такие допущения, ничто не мешает нам наделить эти существа способностью мышления и считать их способными создать геометрию. В таком случае они, конечно, припишут пространству только два измерения.

Но предположим теперь, что эти воображаемые существа, оставаясь все еще лишенными толщины, имеют форму поверхности шара, а не форму плоскости, и расположены все на одной и той же сфере, с которой не могут сойти. Какую геометрию они могут построить? Прежде всего, ясно, что они припишут пространству только два измерения; роль прямой линии для них будет играть кратчайшее расстояние от одной точки до другой на сфере, т. е. дуга большого круга; одним словом, их геометрия будет геометрией сферической.

То, что они назовут пространством, будет эта сфера, с которой они не могут сойти и на которой происходят все явления, доступные их познанию. Их пространство будет безгранично, так как по сфере всегда можно безостановочно идти

вперед, и тем не менее оно будет конечно, никогда нельзя дойти до края, но можно совершить кругообразное движение.

Геометрия Римана есть не что иное, как сферическая геометрия, распространенная на три измерения. Чтобы построить ее, немецкий математик должен был отбросить не только постулат Евклида, но, кроме того, еще и первую аксиому: через две точки можно провести только одну прямую.

На сфере через две данные точки можно провести вообще один большой круг (который, как мы сейчас видели, играл бы роль прямой для наших воображаемых существ); но есть одно исключение: если две данные точки диаметрально противоположны, то через них можно провести бесконечное множество больших кругов. Так и в геометрии Римана (по крайней мере в одной из ее форм) через две точки вообще можно провести только одну прямую; но есть исключительные случаи, когда через две точки можно провести бесконечное количество прямых.

Между геометриями Римана и Лобачевского существует в некотором смысле противоположность.

Так, сумма углов треугольника:

- равна двум прямым в геометрии Евклида;
- меньше двух прямых в геометрии Лобачевского;
- больше двух прямых в геометрии Римана.

Число линий, которые можно провести через данную точку параллельно данной прямой:

- равно единице в геометрии Евклида;
- нулю в геометрии Римана;
- бесконечности в геометрии Лобачевского.

Прибавим, что пространство Римана конечно, хотя и безгранично, в указанном выше смысле этих двух слов.

**Поверхности с постоянной кривизной.** Остается возможным одно возражение. Действительно, теоремы Лобачевского и Римана не содержат никакого противоречия; но как бы ни были многочисленны следствия, которые вывели из своих допущений эти два геометра, все же последние должны были остановиться, не исчерпав всех возможных выводов, потому что число их бесконечно. Но тогда кто поручится, что если бы они продолжали свои выводы далее, то все же не пришли бы к противоречию?

Это затруднение не существует для геометрии Римана, если ограничиваться двумя измерениями; в самом деле, геометрия Римана для двух измерений не отличается, как мы видели, от сферической геометрии, которая есть только ветвь обыкновенной геометрии и которая, следовательно, стоит вне всякой дискуссии.

Бельтрами, сведя также и геометрию Лобачевского для двух измерений к тому, что она стала только ветвью обыкновенной геометрии, опроверг таким же образом направленное против нее возражение. Вот как он пришел к этому. Рассмотрим на некоторой поверхности произвольную фигуру. Представим себе, что эта фигура начерчена на гибком и нерастя-

жимом полотно, наложенном на эту поверхность, так что, когда полотно перемещается и деформируется, различные линии этой фигуры могут изменять форму, не меняя длины. Вообще, эта гибкая и нерастяжимая фигура не может перемещаться, не оставляя поверхности; но есть некоторые особые поверхности, для которых подобное движение было бы возможно: это поверхности с постоянной кривизной.

Возвратимся к сравнению, которое мы сделали выше, и вообразим себе существа без толщины, живущие на одной из таких поверхностей. Движение фигуры, все линии которой сохраняют постоянную длину, с их точки зрения будет возможно. Подобное движение, наоборот, казалось бы абсурдным для существ без толщины, живущих на поверхности с переменной кривизной.

Поверхности с постоянной кривизной бывают двух родов. Одни из них – поверхности с положительной кривизной; они могут быть деформированы так, что накладываются на сферу. Следовательно, геометрия этих поверхностей сводится к сферической геометрии, которая есть геометрия Римана. Другие – поверхности с отрицательной кривизной. Бельтрами показал, что геометрия этих поверхностей есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Таким образом, геометрии двух измерений, как Римана, так и Лобачевского, оказываются связанными с евклидовой геометрией.

**Истолкование неевклидовых геометрических систем.** Таким образом, устраняется возражение, касающееся

геометрических систем двух измерений.

Легко было бы распространить рассуждение Бельтрами на геометрии трех измерений. Умы, не отрицающие пространства четырех измерений, не увидят в этом никакой трудности, но таковых немного. Поэтому я предпочитаю поступить иначе.

Возьмем некоторую плоскость, которую я буду называть основной, и построим нечто вроде словаря, установив соответствие в двойном ряду членов, написанных в двух столбцах, таким же образом, как в обычных словарях соответствуют друг другу слова двух языков, имеющие одинаковое значение.

Пространство	Часть пространства, расположенная ниже основной плоскости
Плоскость	Сфера, ортогонально пересекающая основную плоскость
Прямая	Круг, ортогонально пересекающий основную плоскость
Сфера	Сфера
Круг	Круг
Угол	Угол
Расстояние между двумя точками	Логарифм ангармонического отношения этих двух точек и пересечений основной плоскости с кругом, проходящим через эти две точки и пересекающим ее ортогонально

И т. д.

Возьмем затем теоремы Лобачевского и переведем их с

помощью этого словаря, как мы переводим немецкий текст с помощью немецко-французского словаря. Мы получим таким образом теоремы обыкновенной геометрии.

Например, теорема Лобачевского: «сумма углов треугольника меньше двух прямых» переводится так: «если криволинейный треугольник имеет сторонами дуги кругов, которые при продолжении пересекают основную плоскость ортогонально, то сумма углов этого криволинейного треугольника будет меньше двух прямых». Таким образом, как бы далеко мы ни развивали следствия из допущений Лобачевского, мы никогда не натолкнемся на противоречие. В самом деле, если бы две теоремы Лобачевского находились в противоречии, то то же самое имело бы место и для переводов этих двух теорем, сделанных при помощи нашего словаря; но эти переводы суть теоремы обыкновенной геометрии, а никто не сомневается, что обыкновенная геометрия свободна от противоречий. Однако откуда происходит в нас эта уверенность и справедлива ли она? Это – вопрос, который я не буду разбирать здесь, так как он потребовал бы подробного развития. Во всяком случае, указанное выше возражение отпадает полностью.

Это еще не все. Геометрия Лобачевского, допускающая таким образом конкретное истолкование, перестает быть пустым логическим упражнением и может получить применение; я не имею времени говорить здесь ни об ее приложениях, ни о той пользе, которую Клейн и я извлекли из нее для

интегрирования линейных уравнений.

Указанное истолкование, впрочем, не единственное. Можно было бы установить несколько словарей, аналогичных предыдущему, и все они позволяли бы простым «переводом» преобразовывать теоремы Лобачевского в теоремы обыкновенной геометрии.

**Скрытые аксиомы.** Являются ли аксиомы, явно формулируемые в руководствах, единственными основаниями геометрии? Мы можем убедиться в противном, замечая, что даже если одну за другой отвергнуть эти аксиомы, все-таки еще останутся нетронутыми некоторые предложения, общие теориям Евклида, Лобачевского и Римана. Эти предложения должны опираться на некоторые предпосылки, которые геометры допускают в скрытой форме. Интересно попытаться выделить их из классических доказательств.

Стюарт Милль утверждал, что всякое определение содержит аксиому, так как, определяя, скрыто утверждают существование определяемого предмета. Это значило бы заходить слишком далеко; редко бывает, чтобы математики давали определение, не доказав существования определяемого объекта; если же они избавляют себя от этого труда, то обыкновенно в тех случаях, когда читатель сам легко может сделать соответствующее дополнение. Но не следует забывать, что слово «существование» имеет различный смысл тогда, когда речь идет о математическом объекте, и тогда, когда вопрос касается материального предмета. Математический

объект существует, если его определение не включает противоречия ни в самом себе, ни с предложениями, допущенными раньше.

Но если замечание Стюарта Милля не может быть приложено ко всем определениям, оно тем не менее остается справедливым для некоторых из них. Например, плоскость иногда определяют так: плоскость есть поверхность такого рода, что прямая, соединяющая две любые точки ее, укладывается целиком на этой поверхности.

Это определение, очевидно, скрывает в себе новую аксиому; правда, можно было бы его изменить, и это было бы лучше, но тогда надо было явно указать эту аксиому.

Другие определения могут дать повод к размышлениям, не менее важным.

Таково, например, определение равенства двух фигур: две фигуры равны, когда их можно наложить одну на другую. Чтобы сделать это, надо одну из них перемещать до тех пор, пока она не совпадет с другой; но как надо ее перемещать? Если мы зададим этот вопрос, то, без сомнения, нам ответят, что надо сделать это, не деформируя ее, – как если бы дело шло о неизменяемом твердом теле. Но тогда порочный круг будет очевиден.

Фактически это определение ничего не определяет; оно не имело бы никакого смысла для существа, обитающего в мире, где имеются только жидкости. Если оно кажется нам ясным, то просто потому, что мы привыкли к свойствам ре-

альных твердых тел, которые не отличаются значительно от свойств идеальных твердых тел, сохраняющих все свои размеры неизменными.

Между тем, как ни несовершенно это определение, оно скрывает в себе некоторую аксиому.

Возможность движения неизменной фигуры не есть истина, очевидная сама по себе; порядок очевидности ее во всяком случае не превышает порядка очевидности постулата Евклида и несравним с порядком очевидности аналитических априорных суждений.

Впрочем, изучая геометрические определения и доказательства, мы видим, что приходится допустить без доказательства не только возможность этого движения, но и еще некоторые из его свойств. И прежде всего – то, которое вытекает из определения прямой линии. Ей дано много несовершенных определений, но истинным является следующее, подразумеваемое во всех доказательствах, где используется прямая линия:

«Может случиться, что движение неизменной фигуры будет таково, что все точки некоторой линии, принадлежащей этой фигуре, остаются неподвижными, между тем как все точки, расположенные вне этой линии, движутся. Подобная линия будет называться прямой». В этой формулировке мы намеренно отделили определение от аксиомы, которую оно скрывает в себе.

Многие из доказательств – как, например, доказательства

равенства треугольников, доказательство возможности опустить перпендикуляр из точки на прямую – предполагают предложения, которые прямо не указываются, так как они требуют допущения возможности переносить фигуру в пространстве определенным образом.

**Четвертая геометрия.** Среди этих скрытых аксиом, мне кажется, есть одна, которая заслуживает некоторого внимания, так как, опуская ее, можно построить четвертую геометрию, столь же свободную от внутренних противоречий, как и геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Чтобы доказать, что всегда можно восставить из точки  $A$  перпендикуляр к прямой  $AB$ , рассматривают прямую  $AC$ , вращающуюся около точки  $A$  и сначала сливающуюся с неподвижной прямой  $AB$ ; ее поворачивают около  $A$  до тех пор, пока она не образует продолжения  $AB$ .

Таким образом допускаются два предположения: во-первых, что подобное вращение возможно и, во-вторых, что можно продолжать его до тех пор, пока две прямые не составят продолжение одна другой. Если мы допустим первое и откинем второе, то придем к ряду теорем, еще более странных, чем теоремы Лобачевского и Римана, но в такой же степени свободных от противоречия.

Я приведу только одну из этих теорем, и притом не из самых странных: действительная прямая может быть перпендикулярна сама к себе.

**Теорема Ли.** Число аксиом, скрытым образом введенных

в классические доказательства, больше, чем это необходимо. Было бы интересно свести это число к минимуму. Можно спросить себя сначала, осуществимо ли это желание – не беспредельно ли и число необходимых аксиом, и число вообразимых геометрий. В этого рода исследованиях первое место занимает теорема Софуса Ли. Ее можно выразить так:

Предположим, что допускаются следующие положения:

1. Пространство имеет  $n$  измерений.
2. Движение неизменяемой фигуры возможно.
3. Необходимо  $p$  условий, чтобы определить положение этой фигуры в пространстве.

*Число геометрий, совместимых с этими положениями, будет ограниченное.*

Я могу даже прибавить, что если  $n$  дано, то для  $p$  можно указать высший предел.

Следовательно, если допустить возможность движения неизменяемой фигуры, то можно будет придумать лишь конечное число (и даже довольно ограниченное) геометрических систем трех измерений.

Геометрии Римана. Между тем этот результат, по-видимому, находится в противоречии с заключениями Римана, так как этот ученый построил бесчисленное множество различных геометрий (та, которой обыкновенно дают его имя, есть не более чем частный случай).

Все зависит, говорит Рیمان, от способа, которым определяют длину кривой. Но существует бесконечное множество

способов определять эту длину, и каждый из них может сделаться точкой отправления новой геометрии. Это совершенно верно; но большинство этих определений несовместимо с движением неизменяемой фигуры, которое предполагается возможным в теореме Ли. Эти геометрии Римана, столь интересные с различных точек зрения, могут быть лишь чисто аналитическими, и они не поддаются доказательствам, которые были бы аналогичны евклидовым.

**Геометрии Гильберта.** Наконец, Веронезе и Гильберт придумали новые, еще более странные геометрии, которые они назвали *неархимедовыми*. Они построили их, устранив аксиому Архимеда, в силу которой любая данная протяженность, умноженная на целое достаточно большое число, в конечном счете превзойдет любую данную протяженность, сколь бы велика она ни была. На неархимедовой прямой существуют все точки нашей обычной геометрии, но имеются множества других, которые вставляются между ними, так что между двумя отрезками, которые геометры старой школы рассматривали как смежные, оказывается возможным поместить множество новых точек. Одним словом, неархимедовы пространства уже не являются более непрерывностью второго порядка, если применять язык предыдущей главы, они суть непрерывность третьего порядка.

**О природе аксиом.** Большинство математиков смотрят на геометрию Лобачевского как на простой логический курьез; но некоторые из них идут дальше. Раз возможно

несколько геометрий, то достоверно ли, что наша геометрия есть истинная? Без сомнения, опыт учит нас, что сумма углов треугольника равна двум прямым; но это потому, что мы оперируем треугольниками слишком малыми; разность, по Лобачевскому, пропорциональна площади треугольника; не может ли она сделаться заметной, когда мы будем оперировать большими треугольниками или когда наши измерения сделаются более точными? Таким образом, евклидова геометрия была бы только временной геометрией.

Чтобы обсудить это мнение, мы должны сначала спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант?

Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть.

Чтобы убедиться в этом, возьмем настоящее синтетическое априорное суждение, например то, которое, как мы видели в первой главе, играет первенствующую роль: *если теорема верна для числа 1 и если доказано, что раз она справедлива для  $n$ , то она верна и для  $n + 1$ ; в таком случае она будет справедлива для всех положительных целых чисел*.

Попытаемся затем отвлечься от этого положения и, откинув его, построить ложную арифметику по аналогии с неевклидовой геометрией. Это нам не удастся. Сначала было да-

же стремление рассматривать эти суждения как аналитические.

С другой стороны, обратимся снова к нашим воображаемым существам без толщины; могли ли бы мы допустить, чтобы эти существа, если бы их ум был устроен по образу нашего, приняли евклидову геометрию, которая противоречила бы всему их опыту?

Итак, не должны ли мы заключить, что аксиомы геометрии суть истины экспериментальные? Но над идеальными прямыми или окружностями не экспериментируют; это можно делать только над материальными объектами. К чему же относятся опыты, которые служили бы основанием геометрии?

Ответ ясен. Выше мы видели, что рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел.

Свойства света и его прямолинейное распространение также были поводом, из которого вытекли некоторые предложения геометрии, в частности предложения проективной геометрии; так что с этой точки зрения можно было бы сказать, что метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия – изучение света.

Но трудность остается в силе, и она непреодолима. Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы наукой точной и должна была бы подвергаться постоянному пе-

решают. Даже более, она немедленно была бы уличена в ошибке, так как мы знаем, что не существует твердого тела абсолютно неизменного.

Итак, *геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами*. Они суть *условные положения* (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы *руководствуемся* опытными фактами, но самый выбор остается *свободным* и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться *строго* верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближенными.

Другими словами, *аксиомы геометрии* (я не говорю об аксиомах арифметики) *суть не более чем замаскированные определения*.

Если теперь мы обратимся к вопросу, является ли евклидова геометрия истинной, то найдем, что он не имеет смысла. Это было бы все равно что спрашивать, какая система истинна – метрическая или же система со старинными мерами, или какие координаты вернее – декартовы или же полярные. Никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть только *более удобной*. И вот, евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной по следующим причинам:

1. Она проще всех других; притом она является таковой не только вследствие наших умственных привычек, не вслед-

ствие какой-то, я не знаю, непосредственной интуиции, которая нам свойственна по отношению к евклидову пространству; она наиболее проста и сама по себе, подобно тому как многочлен первой степени проще многочлена второй степени; формулы сферической тригонометрии сложнее формул прямолинейной тригонометрии, и они показались бы еще более сложными для аналитика, который не был бы знаком с геометрическими обозначениями.

2. Она в достаточной степени согласуется со свойствами реальных твердых тел, к которым приближаются части нашего организма и наш глаз и на свойстве которых мы строим наши измерительные приборы.

## **Глава IV. Пространство и геометрия**

Начнем с маленького парадокса.

Существа, разум которых был бы подобен нашему и которые имели бы такие же органы чувств, как и мы, но которые не получили бы никакого предварительного воспитания, могли бы получить от соответственно подобранного внешнего мира такие впечатления, что им пришлось бы построить геометрию иную, чем евклидова, и разместить явления этого внешнего мира в пространстве неевклидовом или даже в пространстве четырех измерений.

Для нас, ум которых сформировался под влиянием окружающего нас мира, не составило бы никакой трудности от-

нести к нашему евклидову пространству явления этого нового мира, если бы мы были в него внезапно перенесены. И, напротив, если бы существа из того мира были перенесены к нам, они должны были бы отнести наши явления к неевклидову пространству.

Но ведь с небольшими усилиями этого же могли бы достигнуть и мы.

Тот, кто всю свою жизнь посвятил бы такой задаче, может быть, оказался бы в состоянии представить себе четвертое измерение.

Пространство геометрическое и пространство представлений. Часто говорят, что образы внешних предметов локализованы в пространстве, что они даже не могут образоваться иначе, как при этом условии. Говорят также, что это пространство, которое таким образом служит готовым *кадром* наших ощущений и представлений, тождественно с пространством геометров, всеми свойствами которого оно обладает.

Всем, кто так думает, предыдущая фраза должна показаться крайне странной. Но надо рассмотреть, не обманываются ли они некоторой иллюзией, которую более глубокий анализ мог бы рассеять.

Каковы, прежде всего, свойства пространства в собственном смысле? Я хочу сказать – того пространства, которое является предметом геометрии и которое я назову *пространством геометрическим*. Вот некоторые из наиболее суще-

ственных его свойств:

1. Оно непрерывно.
2. Оно бесконечно.
3. Оно имеет три измерения.
4. Оно однородно, т. е. все точки его тождественны между собой.
5. Оно изотропно, т. е. все прямые, которые проходят через одну и ту же точку, тождественны между собой.

Сравним теперь его с кадром наших представлений и ощущений, который я мог бы назвать *пространством представлений*.

**Пространство визуальное.** Рассмотрим сначала чисто зрительное впечатление, обуславливаемое изображением, возникающим на сетчатке. Краткий анализ показывает, что это изображение непрерывно, но обладает только двумя измерениями; это уже составляет отличие между пространством геометрическим и тем, что можно было бы назвать чисто визуальным пространством. Далее, этот образ заключен в ограниченном кадре.

Наконец, существует еще одно отличие, не менее важное: *это чисто визуальное пространство неоднородно*. Различные точки сетчатки – независимо от изображений, которые могут на них возникать, – играют не одну и ту же роль. Никогда нельзя считать желтое пятно тождественным с точкой, лежащей у края сетчатки. В самом деле, здесь не только самый предмет производит гораздо более живые впечатления,

но здесь, как и во всяком *ограниченном* кадре, точка, занимающая центр кадра, не будет казаться тождественной с точкой, близкой к одному из кадров.

Более глубокий анализ, без сомнения, показал бы нам, что эта непрерывность визуального пространства и его два измерения суть не более чем иллюзия; этот анализ еще более отдалил бы визуальное пространство от геометрического. Но мы ограничимся здесь только этим замечанием, следствия из которого были достаточно рассмотрены в главе II.

Однако зрение позволяет нам оценивать расстояния и, следовательно, воспринимать третье измерение. Но всякий знает, что это восприятие третьего измерения сводится к ощущению усилия, сопровождающему аккомодацию, которую надо выполнить, и к ощущению, сопровождающему то схождение обеих глазных осей, которое необходимо для отчетливого восприятия предмета.

Мы имеем здесь мускульные ощущения, совершенно отличные от ощущений зрительных, которые дали нам познание первых двух измерений. Таким образом, третье измерение выступит перед нами не в той же роли, какую играют два других. А следовательно, то, что можно назвать *полным визуальным пространством*, не есть пространство изотропное.

Правда, оно имеет как раз три измерения, т. е. элементы наших зрительных ощущений (по крайней мере те из них, которые, слагаясь, образуют представление протяженности)

будут вполне определены, когда известны три из них; выражаясь математическим языком, они будут функциями трех независимых переменных.

Но исследуем предмет несколько ближе. Третье измерение открывается нам двумя различными способами: благодаря усилию при аккомодации и вследствие схождения глазных осей.

Эти два рода показаний, без сомнения, всегда согласованы друг с другом. Между ними существует постоянное соотношение; выражаясь математически, две переменные, измеряющие оба типа мускульного ощущения, не выступают перед нами в качестве независимых, или еще, – чтобы не прибегать к математическим понятиям достаточно высокой сложности, – мы можем снова воспользоваться языком предыдущей главы и выразить тот же факт следующим образом: если два ощущения схождения осей  $A$  и  $B$  неразличимы, то и два соответственно сопровождающих их ощущения аккомодации  $A'$  и  $B'$  будут также неразличимы.

Но такое соотношение ощущений – это, так сказать, опытный факт; ничто не мешает а priori допустить обратное, и если окажется, что это обратное действительно имеет место, если эти два типа мускульных ощущений изменяются независимо один от другого, то мы должны будем ввести новую независимую переменную, и «полное визуальное пространство» выступит перед нами как физическая непрерывность четырех измерений.

Я даже прибавлю, что это представляет собою факт *внешнего* опыта. Ничто не мешает предположить, что существо, имеющее ум, подобный нашему, и такие же органы чувств, как и мы, помещено в мире, куда свет достигает, только пройдя через преломляющие среды сложной формы. Тогда два показания, служащие нам для оценки расстояний, перестали бы быть связанными постоянным соотношением. Существо, которое получило бы в подобном мире воспитание своих чувств, без сомнения, приписало бы полному визуальному пространству четыре измерения.

**Пространство тактильное и пространство моторное.** «Тактильное пространство» еще более сложно, чем визуальное, и еще более, чем оно, удаляется от пространства геометрического. Бесполезно было бы повторять для осязания анализ, проведенный мною относительно зрения.

Но вне данных зрения и осязания существуют другие ощущения, которые так же, как и эти ощущения, и даже более способствуют образованию понятия пространства. Это – те всем известные ощущения, которыми сопровождаются все наши движения и которые обыкновенно называются мускульными.

Соответствующий им кадр (*le cadre*) образует то, что можно назвать *моторным пространством*.

Каждый мускул дает происхождение особому ощущению, способному делаться больше или меньше, так что совокупность наших мускульных ощущений будет зависеть от столь-

ких переменных, сколько у нас мускулов. С этой точки зрения *моторное пространство имело бы столько измерений, сколько мы имеем мускулов*.

Я знаю, мне тотчас скажут, что если мускульные ощущения способствуют образованию понятия пространства, то это потому, что мы имеем чувство *направления* каждого движения, и оно является составной частью ощущения. Если бы это было так, если бы мускульное ощущение не могло зародиться иначе, как сопутствуемое геометрическим чувством направления, то геометрическое пространство было бы формой, присущей нашей способности к ощущению. Но когда я анализирую свои ощущения, я этого совершенно не замечаю. Я вижу, что ощущения, соответствующие движениям того же направления, связаны в моем уме простой *ассоциацией идей*. К этой ассоциации идей и сводится то, что мы называем «чувством направления». Следовательно, этого чувства нельзя было бы найти в единичном ощущении.

Эта ассоциация крайне сложна, так как сокращение того же мускула может отвечать, смотря по положению членов, движениям самых различных направлений.

Она, кроме того, очевидно, является приобретенной; как все ассоциации идей, она есть результат привычки; эта привычка сама вытекает из крайне многочисленных опытов; не подлежит никакому сомнению, что если бы воспитание наших чувств происходило в иной среде, где мы получали иные впечатления, то возникли бы иные привычки, и наши му-

скульные ощущения были бы ассоциированы по иным законам.

**Характерные черты пространства представлений.** Таким образом, пространство представлений в своих трех формах – визуального, тактильного и моторного пространства – существенно отличается от геометрического пространства.

Оно ни однородно, ни изотропно; нельзя даже сказать, что оно имеет три измерения.

Часто говорят, что мы «проектируем» в геометрическое пространство предметы наших внешних восприятий, что мы «локализуем» их. Имеет ли это смысл и какой? Должно ли это обозначать, что мы *представляем* себе внешние предметы в геометрическом пространстве?

Наши представления суть только воспроизведение наших ощущений, поэтому они могут разместиться только в том же кадре, в каком и последние, т. е. в пространстве представлений.

Нам так же невозможно представить себе внешние тела в геометрическом пространстве, как невозможно художнику рисовать на плоской картине предметы с их тремя измерениями.

Пространство представлений есть только образ геометрического пространства – образ, видоизмененный некоторым родом перспективы; мы не можем представить себе предметы иначе, как подчиняя их законам этой перспективы.

Мы не *представляем* себе, следовательно, внешних тел в геометрическом пространстве, но мы *рассуждаем* об этих телах, как если бы они были помещены в геометрическом пространстве.

С другой стороны, когда говорят, что мы «локализуем» данный предмет в данной точке пространства, что хотят этим сказать?

*Это просто означает, что мы представляем себе движения, которые надо совершить, чтобы достигнуть этого предмета.*

И пусть не говорят, что для того, чтобы представить себе эти движения, их надо проектировать сначала в пространство и что понятие пространства должно, следовательно, существовать раньше.

Когда я говорю, что мы представляем себе эти движения, я хочу сказать только, что мы представляем себе мускульные ощущения, которые сопровождают их и которые вовсе не имеют геометрического характера, а следовательно, отнюдь не предполагают предсуществования понятия пространства.

**Изменения состояния и изменения положения.** Но скажут, если идея геометрического пространства не присуща нашему уму и, с другой стороны, если никакое из наших ощущений не может нам доставить ее, то как она могла возникнуть?

Это – тема нашего ближайшего исследования. Оно потребует у нас некоторого времени; но я могу резюмировать в

нескольких словах конечную цель рассуждения, которое мне предстоит развить.

*Никакое из наших ощущений, взятое в отдельности, не могло бы привести нас к идее пространства; мы пришли к ней, только изучая законы, по которым эти ощущения следуют друг за другом.* Мы видим прежде всего, что наши впечатления подвержены изменению; но между изменениями, которые мы констатируем, мы скоро бываем вынуждены делать различие.

Мы говорим, или что некоторые предметы, вызывающие эти впечатления, изменили свое состояние, или что они изменили свое положение – что они просто переместились.

Меняет ли предмет свое состояние или только положение, это передается нам всегда одним и тем же способом: *изменением во всем составе впечатлений.*

Каким же образом мы могли прийти к различию обоих изменений? Если произошло только изменение положения, то мы можем восстановить прежнюю совокупность впечатлений, совершая движения, ставящие нас в то же *относительное* положение к подвижному предмету. Мы компенсируем таким образом происшедшее изменение, восстанавливая начальное состояние обратным изменением.

Так, если речь идет о зрении и если предмет перемещается перед нашими глазами, мы можем за ним «следить глазами» и удерживать его изображение в той же точке сетчатки посредством соответственных движений глазного яблока.

Эти движения мы сознаем, так как они являются волевыми и сопровождаются мускульными ощущениями; но это не значит, что мы представляем их происходящими в геометрическом пространстве.

Именно этим характеризуется изменение положения, и оно отличается от изменения состояния тем, что всегда может быть компенсировано указанным способом.

Следовательно, может случиться, что мы переходим от системы впечатлений  $A$  к системе  $B$  двумя различными способами: 1) произвольно и без каких-либо мускульных ощущений – когда перемещается предмет; 2) произвольно и при наличии мускульных ощущений – когда предмет неподвижен, но перемещаемся мы таким образом, что предмет имеет по отношению к нам относительное движение.

Если дело происходит указанным образом, то переход от системы впечатлений  $A$  к системе  $B$  есть только изменение положения.

Отсюда следует, что зрение и осязание не могли бы нам дать понятие пространства без помощи «мускульного чувства».

Это понятие не могло бы образоваться не только из единичного ощущения, но даже *из ряда* ощущений; кроме того, существо *неподвижное* никогда не могло бы приобрести его, так как, если бы оно не имело возможности компенсировать своими движениями эффектов, зависящих от изменений положения внешних предметов, оно не имело бы никакого ос-

нования отличать их от изменений состояния. Оно не могло бы также приобрести это понятие, если бы движения его не были произвольными или если бы они не сопровождались некоторыми ощущениями.

**Условия компенсации.** Каким образом возможно явление такого рода, что два изменения, не зависящие друг от друга, взаимно компенсируются?

Ум, *знакомый уже с геометрией*, рассуждал бы так. Для того чтобы произошла компенсация, очевидно, нужно, чтобы различные части внешнего предмета, с одной стороны, и различные органы наших чувств, с другой, приходили после двойного изменения опять в то же *относительное* положение. А для этого надо, чтобы различные части внешнего предмета равным образом сохранили друг к другу то же самое относительное положение и чтобы то же имело место для взаимного расположения различных частей нашего тела.

Другими словами, при первом изменении внешний предмет должен перемещаться как неизменное твердое тело; то же самое должно произойти с системой нашего тела при втором изменении, компенсирующем первое.

При этих условиях компенсация может произойти. Но мы, *не будучи еще знакомы с геометрией*, – потому что у нас еще не образовалось понятие пространства, – не можем рассуждать таким образом; мы не можем предвидеть a priori, возможна ли компенсация. Но опыт учит нас, что она иногда имеет место, и это – тот опытный факт, из которого мы ис-

ходим для различения изменений состояния от изменений положения.

**Твердые тела и геометрия.** Среди окружающих нас предметов есть такие, которые часто испытывают перемещения, способные быть компенсированными *соответственным* (коррелятивным) движением нашего собственного тела. Это – *тела твердые*.

Другие предметы, форма которых способна изменяться, испытывают подобные перемещения (изменения положения без изменения формы) только в исключительных случаях. Когда тело перемещается, *изменяя форму*, мы уже не можем соответственными движениями привести органы наших чувств в то же *относительное* положение к этому телу; следовательно, мы более не в состоянии восстановить начальную совокупность впечатлений.

Только позднее и вследствие новых опытов мы научаемся разлагать тела переменной формы на меньшие элементы такого рода, что каждый из них перемещается почти по тем же законам, что и твердые тела. Мы таким образом отличаем «деформации» от других изменений состояния; при таких деформациях каждый элемент испытывает простое изменение положения, которое может быть компенсировано, но изменение, испытываемое всей совокупностью элементов, более глубоко и уже не способно компенсироваться коррелятивным движением<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> То есть коррелятивным движением нашего собственного тела (см. выше). –

Подобное понятие, будучи уже очень сложным, могло явиться только относительно поздно; кроме того, оно не могло бы зародиться, если бы наблюдение твердых тел уже не научило нас отличать изменения положения.

*Следовательно, если бы не было твердых тел в природе, не было бы и геометрии.*

Другое замечание также заслуживает того, чтобы на нем остановиться. Вообразим твердое тело, занимающее сначала положение  $\alpha$  и затем переходящее в положение  $\beta$ ; в первом своем положении оно произведет на нас систему впечатлений  $A$  и во втором – систему впечатлений  $B$ . Пусть имеется теперь второе твердое тело, качественно вполне отличное от первого, например, иного цвета. Предположим еще, что оно переходит от положения  $\alpha'$ , в котором оно производит на нас систему впечатлений  $A'$ , к положению  $\beta'$ , в котором оно вызывает в нас систему впечатлений  $B'$ .

Вообще, ни система  $A$  не будет иметь ничего общего с системой  $A'$ , ни система  $B$  с системой  $B'$ . Переход от системы  $A$  к системе  $B$  и переход от системы  $A'$  к системе  $B'$  суть, следовательно, два изменения, которые *сами по себе*, вообще говоря, ничего общего не имеют. Между тем и то и другое изменение мы рассматриваем как перемещения; более того, мы рассматриваем их как *то же самое* перемещение. Каким образом это происходит?

Это – просто потому, что и то и другое перемещение мо-

жет быть компенсировано *одним и тем же* коррелятивным движением нашего тела.

Следовательно, не что иное, как «коррелятивное движение», составляет единственную связь между двумя явлениями, которые иначе мы никогда и не подумали бы сближать.

С другой стороны, наше тело, благодаря огромному числу его сочленений и мускулов, может предпринимать множество различных движений; но не все они способны «компенсировать» изменение внешних предметов; к этому способны только те, при которых или все наше тело, или по крайней мере те из органов наших чувств, которых касается дело, перемещаются как целое, т. е. не изменяя относительных положений, – подобно твердому телу.

Итак.

Мы должны прежде всего различать две категории явлений. Одни, произвольные, не сопровождаемые мускульными ощущениями, приписываются нами внешним предметам; это суть внешние изменения. Другие, противоположного характера, которые мы приписываем движениям нашего собственного тела, суть изменения внутренние.

Мы замечаем, что известные изменения каждой из этих категорий могут быть компенсированы коррелятивным изменением другой категории.

Среди внешних изменений мы отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в другой категории; мы называем их перемещениями; среди изменений внутренних мы

также отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в первой категории. Таким образом, благодаря этой взаимности определяется особый класс явлений, которые мы называем перемещениями.

*Законы этих явлений и составляют предмет геометрии.*

**Закон однородности.** Первый из этих законов есть закон однородности.

Предположим, что благодаря внешнему изменению  $\alpha$  мы пришли от системы впечатлений  $A$  к системе  $B$ ; потом это изменение  $\alpha$  компенсировано соответственным волевым движением  $\beta$  так, что мы пришли опять к системе  $A$ .

Предположим теперь, что другое внешнее изменение  $\alpha'$  снова приводит нас от системы  $A$  к системе  $B$ .

Опыт учит нас тогда, что это изменение  $\alpha'$ , как и  $\alpha$ , способно компенсироваться коррелятивным волевым движением  $\beta'$  и что это движение  $\beta'$  соответствует тем же мускульным ощущениям, что и движение  $\beta$ , которое компенсировало  $\alpha$ .

Именно этот факт и выражается обыкновенно словами: *пространство однородно и изотропно.*

Можно сказать также, что движение, происшедшее один раз, может повториться второй раз, третий раз и т. д., не меняя своих свойств.

В первой главе, где мы изучали природу математического умозаключения, мы видели, какое важное значение следует приписать возможности повторять неопределенное число раз одну и ту же операцию.

Именно от этого повторения математическое умозаключение приобретает свою силу; и если эта сила распространяется также на геометрические факты, то это – благодаря закону однородности.

Для полноты изложения надо было бы присоединить к закону однородности множество других аналогичных законов; я не хочу входить по поводу их в подробности, но математики резюмируют их одним словом, говоря, что перемещения образуют «группу».

**Неевклидов мир.** Если бы геометрическое пространство выступало в качестве кадра для каждого нашего представления, взятого в отдельности, то было бы невозможно представить себе образ, отделенный от этого кадра, и мы не могли бы ничего изменить в нашей геометрии.

На деле это не так: геометрия есть только резюме законов, по которым эти образы *следуют друг за другом*. В таком случае ничто не мешает нам вообразить себе ряд представлений, во всем подобных нашим обычным представлениям, но следующих друг за другом по законам, отличным от тех, к которым мы привыкли.

Поэтому понятно, что существа, умственное воспитание которых проходило бы в такой среде, где эти законы не выполняются, могли бы иметь геометрию, в значительной степени отличную от нашей.

Вообразим, например, мир, заключенный внутри большой сферы и подчиненный следующим законам. Темпера-

тура здесь не равномерна; она имеет наибольшее значение в центре и понижается по мере удаления от него, делаясь равной абсолютному нулю на шаровой поверхности, которая является границей этого мира.

Я определю в точности даже закон, по которому изменяется эта температура. Пусть  $R$  будет радиус граничной поверхности,  $r$  – расстояние рассматриваемой точки от центра сферы. Абсолютная температура пусть будет пропорциональна  $R^2 - r^2$ .

Я предположу далее, что в этом мире все тела имеют один и тот же коэффициент расширения, именно такой, что длина какой-нибудь линейки пропорциональна абсолютной температуре.

Наконец, я предположу, что предмет, перенесенный из одной точки в другую, где температура иная, тотчас же приходит в состояние теплового равновесия со своей новой средой. В этих допущениях нет ничего ни противоречивого, ни немыслимого.

В таком случае движущийся предмет будет все уменьшаться по мере приближения к граничной сфере. Теперь заметим, что хотя этот мир ограничен с точки зрения нашей обычной геометрии, тем не менее он будет казаться бесконечным для его обитателей.

В самом деле, когда они пожелали бы приблизиться к граничной сфере, они охлаждались бы и становились бы все меньше и меньше. Поэтому шаги их постоянно укорачива-

лись бы, и они никогда не могли бы достигнуть граничной сферы.

Если для нас геометрия есть не что иное, как изучение законов, по которым движутся неизменные твердые тела, то для этих воображаемых существ она была бы изучением законов, по которым движутся твердые тела, *изменяющиеся вследствие тех различий в температуре*, о которых я только что говорил.

Без сомнения, и в нашем мире реальные твердые тела также испытывают изменения формы и объема вследствие нагревания и охлаждения. Но устанавливая основы геометрии, мы пренебрегаем этими изменениями, так как, помимо того, что они крайне незначительны, они еще беспорядочны и, следовательно, кажутся нам случайными.

В воображаемом нами мире это было бы уже не так; эти изменения следовали бы правильным и очень простым законам. С другой стороны, различные твердые составные части тела обитателей этого мира испытывали бы такие же изменения формы и объема.

Я сделаю еще другое допущение. Я предположу, что свет здесь проходит через среды различной преломляющей способности, именно такие, что показатель преломления обратно пропорционален  $R^2 - r^2$ . Легко видеть, что в этих условиях световые лучи были бы не прямолинейными, а круговыми.

Чтобы оправдать все предыдущее, мне остается показать,

что известные изменения, происходящие в положении внешних предметов, могут быть *компенсированы* коррелятивными движениями чувствующих существ, которые заселяют этот воображаемый мир; таким образом, может быть восстановлен первоначальный комплекс впечатлений, испытываемых этими существами.

Предположим в самом деле, что предмет перемещается, деформируясь: не как неизменное твердое тело, но как твердое тело, испытывающее неравномерные расширения, в точности соответствующие допущенному выше закону изменения температур. Для краткости я позволю себе называть подобное движение *неевклидовым перемещением*.

Если по соседству находится чувствующее существо, его впечатления будут изменены благодаря перемещению предмета, но оно будет в состоянии восстановить их в прежнем виде, передвигаясь само надлежащим образом. Достаточно, чтобы в результате система, состоящая из предмета и чувствующего существа, рассматриваемая как одно тело, испытывала одно из тех особых перемещений, которые я назвал неевклидовыми. Это возможно, если допустить, что члены этих существ расширяются по тому же закону, что и другие тела заселяемого ими мира.

Хотя с точки зрения нашей обычной геометрии тела окажутся после такого перемещения деформированными и различные их части отнюдь не возвратятся в прежнее относительное расположение, но мы увидим, что впечатления чув-

ствующего существа окажутся теми же.

В самом деле, если взаимные расстояния различных частей и могли измениться, тем не менее части, бывшие вначале в соприкосновении, опять будут в соприкосновении. Следовательно, осязательные впечатления не изменятся. С другой стороны, если учесть гипотезу о преломлении и кривизне световых лучей, мы убедимся, что и зрительные впечатления останутся прежними.

Итак, наши воображаемые существа должны будут, как и мы, классифицировать наблюдаемые ими явления и выделить из них «изменения положения», которые можно компенсировать соответственным волевым движением.

Если они создадут геометрию, то она не будет, подобно нашей, изучением движений наших неизменных твердых тел; это будет наука об изменениях положения, изменениях, которые они выделяют в особую группу и которые будут представлять не что иное, как «неевклидовы перемещения». *Это будет неевклидова геометрия.*

Таким образом, такие же существа, как мы, воспитание которых происходило бы в подобном мире, имели бы геометрию, отличную от нашей.

**Мир четырех измерений.** Так же, как неевклидов мир, можно представить себе мир четырех измерений.

Чувство зрения, даже при единственном глазе, в соединении с мускульными ощущениями, сопровождающими движения глазного яблока, могло бы оказаться достаточным для

познания пространства трех измерений.

Образы внешних предметов рисуются на сетчатке, которая является картиной двух измерений; это – *перспективные изображения*.

Но так как эти предметы, а также и наш глаз, подвижны, то мы последовательно видим различные перспективные изображения одного и того же тела, схваченные с нескольких различных точек зрения.

В то же время мы убеждаемся, что переход от одного перспективного изображения к другому часто сопровождается мускульными ощущениями. Если переходы от перспективы  $A$  к перспективе  $B$  и от перспективы  $A'$  к перспективе  $B'$  сопровождаются одними и теми же мускульными ощущениями, то мы сближаем их между собой как операции одной и той же природы.

Изучая затем законы, по которым сочетаются между собой эти операции, мы убеждаемся в том, что они образуют группу, которая имеет такую же структуру, как и группа движений неизменных твердых тел.

Но мы видели, что именно из свойств этой группы мы извлекли понятие геометрического пространства и пространства трех измерений.

Мы понимаем, таким образом, как идея пространства трех измерений могла возникнуть из наблюдения этих перспективных изображений, хотя каждое из них имеет только два измерения; дело в том, что они следуют друг за другом

по определенным законам.

Теперь таким же образом, как на плоскости можно сделать перспективное изображение фигуры трех измерений, можно сделать изображение фигуры четырех измерений на экране трех (или двух) измерений. Для геометра эта задача в высшей степени простая.

Можно также получить несколько перспективных изображений одной и той же фигуры с нескольких различных точек зрения. Мы можем легко представить себе эти перспективные изображения, так как они имеют только три измерения.

Вообразим, что различные перспективные изображения одного и того же предмета следуют одно за другим и что переход от одного к другому сопровождается мускульными ощущениями.

Ясно, что два из таких переходов будут рассматриваться нами как две операции одной и той же природы, если они будут связаны с такими же мускульными ощущениями.

Теперь ничто не мешает нам вообразить себе, что эти операции сочетаются по любому заданному закону, например, так, что образуют группу такой же структуры, как и группа движений неизменного твердого тела четырех измерений.

В таком представлении нет ничего невозможного, и однако это как раз такие же ощущения, которые испытывало бы существо, обладающее сетчаткой двух измерений и возможностью перемещаться в пространстве четырех измерений.

В этом именно смысле допустимо говорить о возможно-

сти представить себе четвертое измерение.

Было бы невозможно представить себе этот вид пространства Гильберта, о котором мы говорили в предыдущей главе, так как это пространство уже не является непрерывностью второго порядка. Следовательно, оно слишком глубоко отличается от нашего обычного пространства.

**Выводы.** Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия – хотя бы отчасти – является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное – и весьма грубо приближенное! – значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. Но на самом деле она не занимается реальными твердыми телами; она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел.

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме (*dans notre esprit*), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности сужде-

ний. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, *эталон*ом, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее *удобна*.

Читатель заметит, что я был бы в состоянии описывать фантастические миры, которые я представлял себе выше, *не переставая пользоваться языком обыкновенной геометрии*.

И в самом деле, мы не изменили бы его, даже если бы были перенесены в такой мир.

Существа, получившие там свое развитие, нашли бы, без сомнения, более удобным создать геометрию, отличную от нашей, которая лучше соответствовала бы их впечатлениям. Что же касается нас, то, наверное, даже при наличии *тех же* впечатлений мы нашли бы более удобным не изменять наших привычек.

## Глава V. Опыт и геометрия

1. В предыдущем я уже неоднократно старался показать, что принципы геометрии не являются фактами опыта и что, в частности, постулат Евклида не мог бы быть доказан опытом. Какими бы доказательными ни представлялись мне вышеприведенные соображения, я считаю нужным еще остановиться на этом вопросе, так как здесь мы встречаем ложную

идею, глубоко укоренившуюся во многих умах.

2. Пусть мы изготовили материальный круг, измерили его радиус и окружность и желаем убедиться, равно ли отношение этих величин числу  $\pi$ . Что мы делаем в этом случае? Мы производим опыт не над свойствами пространства, а над свойствами как того материала, из которого приготовлен этот диск, так и того, из которого сделан метр, служащий для измерений.

3. **Геометрия и астрономия.** Но вопрос ставят еще иначе. Если справедлива геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным; если справедлива геометрия Римана, то он будет отрицательным. Эти результаты, по-видимому, допускают опытную проверку; можно было надеяться, что астрономические наблюдения могут решить выбор между тремя геометриями.

Но то, что в астрономии называется прямой линией, есть просто траектория светового луча. Если, следовательно, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы или отказаться от евклидовой геометрии, или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии. Бесполезно добавлять, что всякий считал бы второе решение более удобным.

Таким образом, евклидовой геометрии нечего опасаться

НОВЫХ ОПЫТОВ.

4. Можно ли утверждать, будто некоторые явления, возможные в евклидовом пространстве, невозможны в неевклидовом, так что опыт, констатируя эти явления, прямо противоречил бы гипотезе о неевклидовом пространстве? По моему мнению, подобный вопрос не может возникнуть. С моей точки зрения, он вполне равносильен следующему вопросу, нелепость которого всякому бросится в глаза: существуют ли длины, которые можно выразить в метрах и сантиметрах, но которых нельзя измерить туазами, футами и дюймами, – так что опыт, констатируя существование этих длин, прямо противоречил бы тому допущению, что существуют туазы, делящиеся на 6 футов.

Рассмотрим вопрос ближе. Допустим, что прямая линия в евклидовом пространстве обладает некоторыми двумя свойствами, которые я назову  $A$  и  $B$ ; что в неевклидовом пространстве она по-прежнему обладает свойством  $A$ , но уже не обладает свойством  $B$ ; допустим, наконец, что в евклидовом – как и в неевклидовом – пространстве прямая линия есть единственная линия, обладающая свойством  $A$ .

Если бы это было так, то опыт мог бы решить выбор между гипотезами Евклида и Лобачевского. Представим себе, что мы констатировали бы, что известный конкретный предмет, доступный опыту, например пучок световых лучей, обладает свойством  $A$ ; отсюда мы заключили бы, что он прямолинейный, и исследовали бы затем, обладает он свойством  $B$

или нет.

Но *это не так*: не существует свойства, которое могло бы, как это свойство  $A$ , быть абсолютным критерием, позволяющим признать, что данная линия есть прямая, и отличить ее от всякой другой линии.

Скажут, например, что это свойство следующее: «прямая линия есть такая линия, что фигура, часть которой она составляет, может двигаться без изменения взаимных расстояний ее точек, причем все точки этой линии остаются неподвижными».

В самом деле, здесь мы имеем свойство, которое и в евклидовом и в неевклидовом пространстве принадлежит прямой и только прямой. Но как узнать на опыте, обладает ли этим свойством тот или другой конкретный предмет? Для этого понадобится измерить расстояния между некоторыми его точками, но как убедиться, что та конкретная величина, которую я измерил своим материальным прибором, в точности представляет собой абстрактное расстояние между этими точками?

Таким образом, мы лишь отодвинули трудность.

И действительно, свойство, которое я изложил, не есть свойство лишь одной прямой линии, оно есть свойство как прямой, так и расстояния. Чтобы оно могло служить абсолютным критерием, надо иметь возможность установить не только то, что оно не принадлежит никакой иной линии, кроме прямой, и принадлежит расстоянию, но еще то, что

оно не принадлежит никакой другой линии, кроме прямой, и никакой другой величине, кроме расстояния. А именно это неверно.

Поскольку невозможно указать конкретный опыт, который мог бы быть истолкован в евклидовой системе и не мог бы быть истолкован в системе Лобачевского, то я могу заключить: никогда никакой опыт не окажется в противоречии с постулатом Евклида, но зато и никакой опыт не будет никогда в противоречии с постулатом Лобачевского.

5. Итак, евклидова (или неевклидова) геометрия никогда не может оказаться в прямом противоречии с опытом. Но этого недостаточно. Возникает вопрос: не может ли случиться, что ее можно будет согласовать с опытом лишь путем нарушения принципа достаточного основания и принципа относительности пространства?

Объясняюсь подробнее. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему; мы обратим внимание, с одной стороны, на «состояние» различных тел этой системы (например, на их температуру, электрический потенциал и т. д.), с другой стороны – на их положение в пространстве; и среди данных, которые позволяют определить это положение, мы различим еще взаимные расстояния этих тел, определяющие их относительные положения, и условия, которые определяют абсолютное положение системы и ее абсолютную ориентировку в пространстве.

Законы явлений, которые будут происходить в этой систе-

ме, могут зависеть от состояния этих тел и их взаимных расстояний; но вследствие относительности и пассивности пространства они не будут зависеть от абсолютного положения и абсолютной ориентировки системы.

Другими словами, состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент будут зависеть от состояния этих же тел и их взаимных расстояний в начальный момент; но они ни в каком случае не будут зависеть от абсолютного начального положения системы и ее абсолютной начальной ориентировки. Это свойство для краткости я буду называть *законом относительности*.

Я говорил до сих пор как геометр, следующий Евклиду. Всякий опыт, как я уже сказал, допускает истолкование на почве евклидовой гипотезы; но он допускает его и на почве гипотезы неевклидовой. Мы произвели ряд опытов; мы их истолковали на основании евклидовой гипотезы и нашли, что это истолкование согласно с «законом относительности».

Истолкуем их теперь по неевклидовой гипотезе. Это всегда возможно; отличие же лишь в том, что в этом новом истолковании неевклидовы расстояния между отдельными телами вообще не будут теми же, что евклидовы расстояния в первом истолковании.

Но будут ли истолкованные таким новым способом опыты по-прежнему оставаться в согласии с нашим «законом относительности»? И если это согласие не сохранится, то не будем ли мы все-таки вправе сказать, что опыт доказал неправду

вильность неевклидовой геометрии?

Легко видеть, что это опасение напрасно; в самом деле, для того чтобы можно было приложить закон относительно-сти во всей строгости, надо было бы приложить его ко всей Вселенной. Если же иметь в виду только часть этой Вселенной и если абсолютное положение этой части изменилось, то и расстояния ее относительно других тел Вселенной также изменились, следовательно, их влияние на рассматриваемую часть Вселенной могло увеличиться или уменьшиться; а это может изменить законы происходящих здесь явлений.

Но если система, о которой у нас идет речь, есть вся Вселенная, то опыт бессилен дать нам указания о ее абсолютном положении и ориентировке в пространстве. Все, что могут обнаружить наши инструменты, сколь бы совершенны они ни были, – это состояние различных частей Вселенной и их взаимные расстояния.

Таким образом, наш закон относительности может быть формулирован так:

Отсчеты, которые мы можем производить в какой-нибудь момент на наших инструментах, будут зависеть только от отсчетов, которые мы могли бы произвести на тех же инструментах в начальный момент.

Но подобная формулировка не зависит ни от какого истолкования опытов. Если закон верен в евклидовом истолковании, он будет верен также и в неевклидовом истолковании.

Я позволю себе по этому поводу сделать маленькое от-

ступление. Выше я говорил о данных, определяющих положение различных тел системы; мне следовало бы сказать также о данных, определяющих их скорости; тогда мне пришлось бы различать, с одной стороны, скорость, с которой изменяются взаимные расстояния различных тел, а с другой – скорости переноса и вращения системы, т. е. скорости, с которыми изменяются ее абсолютное положение и ориентировка.

Для полного удовлетворения ума надо было бы закон относительности формулировать так:

Состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент, так же как и скорости, с которыми изменяются эти расстояния в тот же момент, зависят только от состояния этих тел, их взаимных расстояний в начальный момент, а также от скоростей, с которыми последние изменялись в этот начальный момент; но они не будут зависеть ни от начального абсолютного положения системы, ни от ее абсолютной ориентировки, ни от скоростей, с которыми изменялись это абсолютное положение и ориентировка в начальный момент.

К сожалению, закон, сформулированный таким образом, не находится в согласии с опытами, по крайней мере с обычным их истолкованием.

Представим себе человека, перенесенного на некоторую планету, где небо постоянно закрыто густым покровом облаков, так что никогда не видно других светил; пусть жизнь этой планеты течет так, как если бы она была изолирована в

пространстве. Все же этот человек мог бы заметить ее вращение, измеряя, например, ее сжатие (это производится обыкновенно при помощи астрономических наблюдений, но могло бы быть произведено и средствами чисто геодезическими) или повторяя опыт Фуко с маятником. Следовательно, абсолютное вращение этой планеты могло бы быть обнаружено.

Факт этот смущает философа, но физик вынужден его принять.

Известно, что из этого факта Ньютон заключил о существовании абсолютного пространства; я никак не могу согласиться с таким заключением; причины этого я покажу в третьей части, так как я не хотел бы касаться такого трудного вопроса мимоходом.

Таким образом, мне поневоле пришлось в формулировку закона относительности ввести скорости всякого рода среди данных, определяющих состояние тел.

Во всяком случае, трудность эта остается одной и той же как для геометрии евклидовой, так и для геометрии Лобачевского; поэтому я особенно не был обеспокоен ею и упомянул о ней только к случаю. Что важно, так это вывод: опыт не может решить выбор между Евклидом и Лобачевским.

Итак, как ни взглянуть на дело, невозможно найти разумное основание для геометрического эмпиризма.

6. Опыты обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отноше-

ниях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства.

«Да, – скажете вы на это, – единичный опыт недостаточен, так как он дает только одно уравнение со многими неизвестными; но когда я произведу достаточное количество опытов, я буду иметь достаточно уравнений, чтобы вычислить все мои неизвестные».

Но недостаточно знать высоту грот-мачты, – возражаю я, – чтобы вычислить возраст капитана. Определив все размеры корпуса корабля, вы будете иметь много уравнений, но все-таки вы не узнаете этого возраста. Все ваши измерения, относящиеся к частям корабельного корпуса, не могут обнаружить вам ничего, кроме того, что касается этих частей. Точно так и ваши опыты, как бы многочисленны они ни были: указывая только на взаимные отношения тел, они не скажут нам ничего о взаимных отношениях различных частей пространства.

7. Вы скажете, что если опыты относятся к телам, то они относятся по крайней мере к геометрическим свойствам тел.

Но, прежде всего, – что вы понимаете под геометрическими свойствами тел? Допустим, что здесь речь идет об отношениях тел к пространству; но эти свойства недоступны опытам, которые касаются только взаимного отношения между телами. Одного этого замечания было бы достаточно, чтобы показать, что речь идет о другом.

Постараемся прежде всего понять смысл выражения: гео-

метрические свойства тел. Когда я говорю, что тело слагается из нескольких частей, я думаю, что этим я не высказываю суждения о геометрическом свойстве; это осталось бы справедливым, даже если бы я условился пользоваться неподходящим названием точек для наименьших рассматриваемых мною частей.

Когда я говорю, что такая-то часть такого-то тела находится в соприкосновении с такой-то частью другого какого-нибудь тела, я высказываю предложение, касающееся взаимных отношений этих двух тел, но не их отношений к пространству.

Я думаю, вы согласитесь со мной, что здесь мы имеем дело не с геометрическими свойствами; по крайней мере, вы, наверно, согласитесь, что эти свойства независимы от каких бы то ни было понятий метрической геометрии.

После этого представим себе, что имеется твердое тело, состоящее из восьми тонких железных стержней  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$ ,  $OF$ ,  $OG$  и  $OH$ , соединенных вместе своими концами  $O$ .

Пусть, с другой стороны, мы имеем второе твердое тело, например кусок дерева, на котором отметим чернилами три маленьких пятнышка; я назову их  $\alpha\beta\gamma$ .

Пусть мы убедились затем, что можно привести в соприкосновение  $\alpha\beta\gamma$  с  $AGO$  (т. е. одновременно  $\alpha$  с  $A$ ,  $\beta$  с  $G$  и  $\gamma$  с  $O$ ), потом – что последовательно можно привести в соприкосновение  $\alpha\beta\gamma$  с  $BGO$ ,  $CGO$ ,  $DGO$ ,  $EGO$ ,  $FGO$ , затем с  $AHO$ ,

*ВНО, СНО, ДНО, ЕНО, ФНО*, потом  $\alpha\gamma$  последовательно с *АВ, ВС, CD, DE, EF, FA*.

Вот опытные факты, в которых можно удостовериться, не имея наперед никакого знания о форме или метрических свойствах пространства. Они никоим образом не относятся к «геометрическим свойствам тел». И эти факты будут невозможны, если тела, над которыми экспериментируют, движутся, следуя группе такой же структуры, как группа Лобачевского (я хочу сказать – по законам движения твердых тел в геометрии Лобачевского). Значит, достаточно этих фактов, чтобы убедиться, что тела эти движутся, следуя евклидовой группе, или, по крайней мере, что они движутся не в соответствии с группой Лобачевского.

Что эти факты совместимы с евклидовой группой, легко убедиться: стоит только представить себе  $\alpha\beta\gamma$  неизменяемым твердым телом нашей обычной геометрии, имеющим форму прямоугольного треугольника, а точки *А, В, С, D, E, F, G, H* – вершинами многогранника, образованного двумя правильными шестигранными пирамидами нашей обыкновенной геометрии, имеющими общим основанием *ABCDEF*, а вершинами – одна *G*, другая *H*.

Предположим теперь, что вместо предыдущих фактов мы наблюдали, что можно опять-таки наложить  $\alpha\beta\gamma$  последовательно на *AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, АНО, ВНО, СНО, ДНО, ЕНО, ФНО*, а потом можно  $\alpha\beta$  (отнюдь не  $\alpha\gamma$ ) наложить последовательно на *АВ, ВС, CD, DE, EF* и *FA*.

Вот опытные факты, которые можно было бы наблюдать, если бы неевклидова геометрия была правильна и если бы  $\alpha\beta\gamma\delta$   $OABCDEFGH$  были неизменяемыми твердыми телами: первое – в форме прямоугольного треугольника, а второе – в форме двойной правильной шестигранной пирамиды соответствующих размеров.

Итак, эти новые факты невозможны, раз тела движутся, следуя евклидовой группе; но они стали бы возможны, если бы допустить, что тела движутся подобно группе Лобачевского. Их было бы, следовательно, достаточно (если бы они наблюдались), чтобы убедиться, что рассматриваемые тела не движутся, следуя евклидовой группе.

Таким образом, не вводя никакой гипотезы о форме и природе пространства, об отношениях тел к пространству, не приписывая телам никакого геометрического свойства, я нашел факты, позволяющие мне показать, что доступные опытам тела в одном случае движутся, следуя структуре группы Евклида, в другом – следуя структуре группы Лобачевского.

Однако нельзя сказать, что первый ряд фактов может составить опыт, доказывающий, что пространство является евклидовым, а второй – опыт, доказывающий, что пространство неевклидово.

В самом деле, можно было бы представить себе тела, движущиеся таким образом, что они осуществляют второй ряд фактов. Доказательством служит то, что любой механик мог

бы их построить, если бы он захотел взять на себя этот труд и если бы придавал этому значение. Однако из этого вы не заключили бы, что пространство неевклидово, тем более что обыкновенные твердые тела продолжали бы существовать и тогда, когда механик построил бы странные тела, упомянутые мною: так что пришлось бы даже заключить, что пространство является одновременно евклидовым и неевклидовым.

Предположим, например, что мы имеем большую сферу радиуса  $R$  и что температура убывает от центра к поверхности этой сферы по закону, о котором я говорил, описывая неевклидов мир.

Мы могли бы иметь тела, расширением которых можно было бы пренебречь и которые вели бы себя как обыкновенные неизменяемые твердые тела; с другой стороны, мы могли бы иметь тела очень растяжимые, которые вели бы себя как неевклидовы твердые тела. Мы могли бы иметь две двойные пирамиды  $OABCDEFGH$  и  $O'A'B'C'D'E'F'G'H'$  и два треугольника  $\alpha\beta\gamma$  и  $\alpha'\beta'\gamma'$ . Первая двойная пирамида была бы прямолинейной, вторая – криволинейной; треугольник  $\alpha\beta\gamma$  был бы сделан из нерастяжимого, а треугольник  $\alpha'\beta'\gamma'$  – из очень растяжимого вещества.

Тогда можно было бы обнаружить первый ряд фактов с двойной пирамидой  $OAH$  и треугольником  $\alpha\beta\gamma$  и второй – с двойной пирамидой  $O'A'H'$  и треугольником  $\alpha'\beta'\gamma'$ . И тогда опыт, по-видимому, убеждал бы сначала, что евклидова гео-

метрия истинна, а затем – что она ложна.

*Таким образом, опыты относятся не к пространству, а к телам.*

**8. Добавление.** Для полноты мне следовало бы еще сказать о вопросе очень тонком, который потребовал бы подробного развития; я ограничусь здесь только резюмированием того, что я изложил в «Revue de Métaphysique et de Morale» и в «The Monist». Что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?

Мы видели важность тех «внутренних изменений», которые нам открываются нашими мускульными ощущениями. Они могут служить для характеристики различных положений нашего тела. Возьмем за начальное одно из этих положений  $A$ . Когда мы переходим от этого начального положения к какому-нибудь другому положению  $B$ , мы испытываем ряд мускульных ощущений  $S$ , и этим рядом  $S$  определяется  $B$ . Однако заметим, что часто мы рассматриваем два ряда  $S$  и  $S'$  как определяющие одно и то же положение  $B$  (потому что начальное и конечное положение  $A$  и  $B$  остаются теми же, но промежуточные положения и соответствующие ощущения могут различаться). Как же мы узнаем об эквивалентности этих двух рядов? Это возможно потому, что они могут служить для компенсации одного и того же внешнего изменения, или, более общо, потому, что когда речь идет о компенсации внешнего изменения, один из рядов может быть заменен другим.

Среди этих рядов мы выделили те, которые одни могут компенсировать внешнее изменение и которые мы называли «перемещениями». Так как мы не можем различать два слишком близких перемещения, то совокупность этих перемещений представляет характерные черты физической непрерывности; опыт учит нас, что эта физическая непрерывность имеет шесть измерений; но мы не знаем еще, сколько измерений имеет пространство само по себе; нам надо решить сначала другой вопрос.

Что такое точка пространства? Все думают, что знают это, но это только иллюзия. Когда мы стараемся представить себе точку пространства, то она выступает в виде черного пятна на белой бумаге или как белое пятно от мела на черной доске; это всегда объект. Поэтому вопрос должен быть поставлен следующим образом: что значит, когда я говорю, что предмет  $B$  находится в той же точке, которую только что занимал предмет  $A$ ? И еще: какой критерий позволит мне узнать это?

Я хочу этим сказать, что *хотя сам я не шевелился* (о чем свидетельствует мое мускульное чувство), но мой указательный палец, который только что касался предмета  $A$ , теперь касается предмета  $B$ . Я мог бы воспользоваться другими критериями, например средним пальцем или чувством зрения. Но первый критерий достаточен, я знаю, что если он отвечает утвердительно, то все другие критерии дадут тот же ответ. Я знаю это *из опыта* – я не могу знать этого *a priori*.

Поэтому-то я говорю также, что осязание не может действовать на расстоянии; это – только другой способ выражения того же экспериментального факта. И если я говорю, наоборот, что зрение действует на расстоянии, то это значит, что критерий, доставляемый зрением, может отвечать утвердительно, тогда как другие отвечают отрицательно.

В самом деле, пусть некоторый предмет даже после удаления дает свое отображение в той же точке сетчатки. Тогда зрение дает положительный ответ: предмет пребывает в той же точке, но осязание отвечает отрицательно, ибо палец, только что касавшийся предмета, теперь уже больше его не касается. Если бы опыт показал нам, что касание одним пальцем дает отрицательный ответ, тогда как касание другим – положительный, то мы сказали бы то же самое: что осязание действует на расстоянии.

Итак, для каждого положения моего тела мой указательный палец определяет некоторую точку; это и только это определяет точку пространства.

Каждому положению соответствует, таким образом, одна точка; но часто бывает, что та же точка соответствует нескольким различным положениям (например, в том случае, когда мы говорим, что наш палец не двигался, между тем как остальная часть тела переместилась). Мы выделяем, следовательно, среди изменений положения такие, при которых палец не двигается. Как мы приходим к этому? Только благодаря тому, что мы часто замечаем, как при этих изме-

нениях предмет, находящийся в контакте с пальцем, не разрывает этого контакта.

Отнесем к одному и тому же классу все те положения, которые вытекают одни из других путем одного из выделенных нами таким образом изменений. Всем положениям одного и того же класса будет соответствовать одна и та же точка пространства. Поэтому каждому классу будет соответствовать точка, и каждой точке – класс. Но можно сказать: то, к чему относится опыт, не есть точка; это есть указанный класс изменений или лучше – соответственный класс мускульных ощущений.

И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим просто сказать, что совокупность этих классов выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений.

Мог бы показаться заманчивым тот вывод, что именно опыт показал нам, сколько измерений имеет пространство. Но в действительности наши опыты имели здесь дело еще не с пространством, а с нашим телом и с его отношениями к соседним предметам. Кроме того, они слишком грубы.

В нашем уме предсуществовала скрытая идея известного числа групп: это – те группы, теорию которых создал Ли. Какую из них мы выберем в качестве как бы эталона, с которым будем сравнивать реальные явления? И, выбрав эту группу, какую из ее подгрупп мы возьмем для характеристики точки пространства? Раньше нами руководил опыт, показывая, ка-

кой выбор лучше соответствует свойствам нашего тела. Но тут его роль ограничивается.

**Опыт предков.** Часто говорят, что если индивидуальный опыт не мог породить геометрию, то это не относится к опыту всего человеческого вида. Но что под этим понимается? Не хотят ли этим сказать, что если мы не в состоянии доказать постулат Евклида, то наши предки могли это сделать? Ни в коем случае. Этим хотят сказать, что в силу естественного отбора наш ум приспособился к условиям внешнего мира, что он усвоил себе геометрию, наиболее выгодную для вида, или, другими словами, наиболее удобную. Но это соответствует нашим выводам о том, что геометрия не истинна, а только выгодна.

# Часть III. Сила

## Глава VI. Классическая механика

Англичане преподают механику как науку экспериментальную; на континенте же ее всегда излагают как науку более или менее дедуктивную и априорную. Бесспорно, правы англичане; но как же оказалось возможным так долго держаться другого способа изложения? Почему ученые на континенте, старавшиеся избежать привычек своих предшественников, чаще всего оказывались не в состоянии полностью от них освободиться?

С другой стороны, если принципы механики не имеют иного источника, кроме опыта, не являются ли они в силу этого только приближенными и временными? Не могут ли новые опыты когда-нибудь заставить нас видоизменить эти принципы или даже совсем отказаться от них?

Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом от того, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза.

Это еще не все:

1) Абсолютного пространства не существует; мы познаем

только относительные движения; между тем механические факты чаще всего излагают так, как если бы существовало абсолютное пространство, к которому их можно было бы отнести.

2) Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только условно.

3) Мы не способны к непосредственному восприятию не только равенства двух промежутков времени, но даже простого факта одновременности двух событий, происходящих в различных местах; я разъяснил это в статье, озаглавленной «La mesure du temps»<sup>6</sup>.

4) Наконец, наша евклидова геометрия есть лишь род условного языка; мы могли бы изложить факты механики, относя их к неевклидову пространству, которое было бы основой, менее удобной, но столь же законной, как и наше обычное пространство; изложение слишком осложнилось бы, но осталось бы возможным.

Таким образом, абсолютное пространство, абсолютное время, даже сама геометрия не имеют характера вещей, обуславливающих собой механику; они так же мало предваряют существование механики, как мало французский язык логически предваряет существование истин, выражаемых по-

---

<sup>6</sup> Revue de Métaphysique et de Morale. Janvier, 1898. Т. 6. Р. 1–13. Статья вышла в виде второй главы книги «Ценность науки», см. наст. изд. Ранее перевод ее публиковался: Пуанкаре. Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 419; Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973. – *Прим. ред.*

французски.

Можно было бы попытаться изложить основные законы механики на языке, независимом от всех этих соглашений; тогда, без сомнения, можно было бы лучше отдать себе отчет в том, что представляют эти законы сами по себе; как раз это и попытался сделать (по крайней мере отчасти) Андрад в своих «*Leçons de Mécanique physique*».

Формулировка этих законов оказалась бы, конечно, гораздо более сложной, потому что все указанные выше соглашения и созданы именно для того, чтобы сократить и упростить эту формулировку.

Здесь я оставляю в стороне все эти трудности, за исключением вопроса об абсолютном пространстве. Я далек от мысли пренебрегать ими; но мы достаточно разобрали их в двух первых частях.

Итак, я допущу *временно* абсолютное время и евклидову геометрию.

**Принцип инерции.** Тело, на которое не действует никакая сила, может двигаться только прямолинейно и равномерно.

Есть ли это истина, присущая a priori нашему разуму? Если бы это было так, то как же не знали ее греки? Как могли они думать, что движение прекращается, как только перестает действовать вызвавшая его причина, или что всякое тело, не встречающее никаких препятствий со стороны, принимает круговое движение, как наиболее совершенное из всех

движений?

Говорят, что скорость тела не может измениться, раз нет основания для ее изменения; но не можем ли мы с таким же правом утверждать, что не может измениться положение тела или кривизна его траектории, раз внешняя причина не вызывает их изменения?

Если принцип инерции не принадлежит к числу априорных истин, то не значит ли это, что мы имеем в нем экспериментальный факт? Но разве когда-нибудь экспериментировали над телами, на которые не действовала никакая сила? И как можно было бы получить уверенность, что на эти тела не действует никакая сила? Обыкновенно ссылаются на пример бильярдного шара, очень долгое время катящегося по мраморному столу; но на каком основании мы говорим, что на него не действует никакая сила? Не на том ли, что он слишком удален от всех других тел, чтобы испытывать от них сколько-нибудь заметное действие? Однако он не дальше от земли, чем в том случае, если бы был свободно брошен в воздухе; а всякий знает, что в таком случае он подвергся бы влиянию тяжести, обусловленному земным притяжением.

Преподаватели механики обычно быстро излагают пример с шаром; но они прибавляют, что принцип инерции проверяется косвенно в своих следствиях. Это – неправильное выражение; очевидно, они хотят сказать, что можно проверить различные следствия более общего принципа, по отношению к которому принцип инерции является только част-

ным случаем.

Этот общий принцип я предложу сформулировать так:

Ускорение тела зависит только от положения этого тела и соседних тел и от их скоростей. Математик сказал бы, что движения всех материальных частиц Вселенной определяются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Чтобы уяснить, что здесь мы имеем дело с естественным обобщением закона инерции, я позволю себе привести один воображаемый случай. Выше я указывал, что закон инерции не присущ нам а priori; другие законы были бы столь же хорошо, как и он, совместимы с принципом достаточного основания. Когда на тело не действует никакая сила, то мы могли бы вообразить, что неизменным является не скорость его, а его положение или его ускорение.

Итак, представим себе на минуту, что один из этих двух гипотетических законов есть закон природы и заступает место нашего закона инерции. Каково было бы его естественное обобщение? Поразмыслив минуту, мы это уясним.

В первом случае пришлось бы допустить, что скорость тела зависит только от его положения и от положения соседних тел; во втором – что изменение ускорения тела зависит только от положения этого тела и соседних тел, от их скоростей и от их ускорений.

Или, говоря математическим языком, дифференциальные уравнения движения были бы в первом случае первого порядка, во втором – третьего.

Видоизменим несколько наш воображаемый пример. Представим себе мир, аналогичный нашей Солнечной системе, лишь с тем отличием, что здесь все орбиты планет благодаря чистой случайности не имеют эксцентриситетов и наклонов. Представим себе далее, что массы этих планет слишком ничтожны, чтобы их взаимные возмущения были ощутимы. Астрономы, населяющие одну из этих планет, не преминули бы заключить, что орбита светила может быть только круговой и параллельной определенной плоскости; тогда положения светила в данный момент было бы достаточно для определения его скорости и всей его траектории. Закон инерции, который они установили бы, был бы первый из двух гипотетических законов, о которых я только что говорил.

Вообразим теперь, что вдруг через эту систему проходит с огромной скоростью массивное тело, пришедшее из отдаленных созвездий. Все орбиты окажутся сильно возмущенными. Но это еще не очень смутило бы наших астрономов; они догадались бы, что это новое светило является единственным виновником всего зла. Стоит ему удалиться, – сказали бы они, – и порядок восстановится сам собой; конечно, расстояния планет от Солнца уже не станут вновь такими же, какими они были до катастрофы, но когда не будет более возмущающего светила, орбиты снова станут круговыми. И только тогда, когда возмущающее тело было бы уже далеко, а орбиты, вместо того чтобы опять стать круговыми, превратились

бы в эллиптические, – только тогда эти астрономы заметили бы свою ошибку и необходимость переделать всю свою механику.

Я несколько подробнее остановился на этих гипотезах, потому что, как мне думается, уяснить себе содержание нашего обобщенного закона инерции можно, только сопоставляя его с противоположным допущением.

Мы возвращаемся теперь к этому обобщенному закону инерции. Спрашивается, проверен ли он в настоящее время на опыте, и возможно ли это вообще? Когда Ньютон писал свои «Начала»<sup>7</sup>, он смотрел на эти истину как на выработанную и доказанную экспериментально. Таковой она была в его глазах не только благодаря антропоморфному представлению, о котором речь будет дальше, но благодаря трудам Галилея; она была таковой и в силу законов Кеплера; действительно, согласно этим законам траектория планеты полностью определяется ее начальными положением и скоростью; а это как раз то, чего требует наш обобщенный принцип инерции.

Чтобы этот принцип оказался истинным только по внешнему виду, чтобы можно было опасаться, что когда-нибудь он будет заменен одним из принципов, которые я сейчас противопоставлял ему, пришлось бы допустить, что мы введе-

---

<sup>7</sup> *Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686. Русский перевод: И. Ньютон. Математические начала натуральной философии / Пер. А. Н. Крылова // Собрание трудов академика А. Н. Крылова, Т. VII. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1936. – Прим. ред.*

ны в заблуждение какой-нибудь удивительной случайностью вроде той, которая в развитом мною выше примере ввела в заблуждение наших воображаемых астрономов.

Подобная гипотеза слишком неправдоподобна, чтобы на ней останавливаться. Никто не поверит в возможность таких случайностей. Конечно, вероятность того, чтобы два эксцентриситета были как раз равны нулю (в пределах погрешностей наблюдения), не меньше, чем вероятность того, чтобы один был равен, например, 0,1, а другой 0,2 (тоже в пределах погрешностей наблюдения). Вероятность простого события не меньше вероятности сложного; и тем не менее, когда такое простое событие наступает, мы не согласимся приписать его случайности; мы не захотим верить, что природа умышленно ввела нас в заблуждение. Устраняя гипотезу о возможности заблуждений такого рода, мы можем признать, что, поскольку дело касается астрономии, наш закон был проверен на опыте.

Но астрономия еще не составляет всей физики. Не можем ли мы опасаться, что какой-нибудь новый опыт когда-нибудь обнаружит несостоятельность закона в том или другом отделе физики? Экспериментальный закон всегда подвержен пересмотру; мы всегда должны быть готовы к тому, что он может быть заменен другим законом, более точным.

Однако никто не выражает серьезных опасений, что закон, о котором идет речь, когда-нибудь придется отклонить или исправить. Почему же? Именно потому, что его никогда

нельзя будет подвергнуть решающему испытанию.

Прежде всего, для полноты такого испытания было бы необходимо, чтобы по истечении известного времени все тела Вселенной вернулись вновь к своим начальным положениям и к своим начальным скоростям. Тогда мы увидели бы, примут ли они с этого момента вновь те траектории, по которым они уже следовали один раз.

Но такое испытание невозможно: его можно осуществить только в отдельных частях и при этом всегда будут тела, которые не вернуться к своему начальному положению; таким образом, всякое нарушение этого закона легко найдет себе объяснение.

Но это не все: в астрономии мы *видим* тела, движения которых изучаем, и мы в большинстве случаев допускаем, что они не подвержены действию других тел, которых мы не видим. Таковы те условия, в которых проверяется наш закон.

В физике дело обстоит не совсем так: если в основе физических явлений и лежит движение, то это – движение молекул, которых мы не видим. В таком случае, если ускорение одного из видимых тел представится нам зависящим от чего-то иного, кроме положений или скоростей других видимых тел или невидимых молекул, существование которых мы должны были допустить раньше, то ничто не мешает нам допустить, что это что-то иное есть положение или скорость других молекул, присутствия коих мы до сих пор не подозревали. Закон окажется спасенным.

Я позволю себе на минуту воспользоваться математическим языком, чтобы выразить ту же мысль в иной форме. Я допускаю, что мы наблюдаем  $n$  молекул и констатируем, что их  $3n$  координат удовлетворяют системе  $3n$  дифференциальных уравнений четвертого порядка (не второго, как того требовал бы закон инерции). Мы знаем, что, вводя  $3n$  вспомогательных переменных, мы можем свести систему  $3n$  уравнений четвертого порядка к системе  $6n$  уравнений второго порядка. Тогда стоит допустить, что эти  $3n$  вспомогательных переменных представляют координаты  $n$  невидимых молекул, и результат снова окажется в согласии с законом инерции.

Итак, этот закон, проверенный экспериментально в некоторых частных случаях, может быть без опасения распространен на самые общие случаи, так как мы знаем, что в этих общих случаях опыт уже не может ни подтвердить его, ни быть с ним в противоречии.

**Закон ускорения.** Ускорение тела равно действующей на него силе, деленной на его массу.

Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу.

Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но как измерить силу или массу? Мы не знаем даже, что это такое.

Что такое *масса*? Это, отвечает Ньютон, произведение

объема на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объем. Что такое *сила*? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на *ускорение*. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение.

Эти трудности непреодолимы. Определяя силу как причину движения, мы становимся на почву метафизики, и если бы таким определением пришлось удовольствоваться, оно было бы абсолютно бесплодно. Чтобы определение могло быть к чему-нибудь пригодно, оно должно научить нас измерению силы; к тому же этого условия и достаточно; нет никакой необходимости, чтобы определение научило нас тому, что такое сила сама по себе, или тому, есть ли она причина или следствие движения.

Итак, прежде всего надо определить равенство двух сил. Когда говорят, что две силы равны? Тогда, отвечают нам, когда, будучи приложены к одной и той же массе, они сообщают ей одно и то же ускорение или когда, будучи прямо противоположно направлены, они взаимно уравновешиваются. Но это определение совершенно призрачно. Силу, приложенную к данному телу, нельзя отцепить от него и прицепить затем к другому телу вроде того, как отцепляют локомотив, чтобы сцепить его с другим поездом. Поэтому и нельзя знать, какое ускорение данная сила, приложенная к

данному телу, сообщила бы другому телу, если бы была к нему приложена. Нельзя также знать, каково было бы действие двух сил, не прямо противоположных, в том случае, если бы они были прямо противоположны.

Это именно определение и стараются, так сказать, материализовать, когда измеряют силу динамометром или уравнивают ее грузом. Две силы  $F$  и  $F'$ , которые я для простоты предположу вертикальными и направленными снизу вверх, приложены соответственно к двум телам  $C$  и  $C'$ ; я подвешиваю одно и то же тело веса  $P$  сначала к телу  $C$ , потом к  $C'$ ; если в обоих случаях имеет место равновесие, то я заключу, что две силы  $F$  и  $F'$ , будучи обе равны весу  $P$ , равны между собою.

Но уверен ли я, что тело  $P$  сохранило тот же вес, когда я перенес его от первого тела ко второму? Вовсе нет, я уверен как раз в противном; я знаю, что напряжение силы тяжести меняется при переходе от одной точки к другой и что оно, например, больше на полюсе, чем на экваторе. Бесспорно, эта разница ничтожна, и на практике я не стал бы принимать ее в расчет; но правильное определение должно обладать математической точностью, а этой точности здесь нет. Сказанное относительно тяжести, очевидно, применимо и к упругой силе динамометра, которая может меняться в зависимости от температуры и от многих других обстоятельств.

Это не все: нельзя сказать, что вес тела  $P$  приложен к телу  $C$  и прямо уравнивает силу  $F$ . То, что приложено к телу

$C$ , есть действие  $A$  тела  $P$  на тело  $C$ ; тело  $P$  в свою очередь находится под действием, с одной стороны, своего собственного веса, с другой – противодействия  $R$  тела  $C$  на тело  $P$ . В результате сила  $F$  равна силе  $A$ , потому что уравнивает ее; сила  $A$  равна  $R$  в силу принципа равенства действия противодействию; наконец, сила  $R$  равна весу  $P$ , потому что его уравнивает. Уже как следствие этих трех равенств мы выводим равенство  $F$  и веса  $P$ .

Таким образом, при определении равенства двух сил нам приходится опираться на принцип равенства действия и противодействия; *значит, этот последний принцип мы должны считать уже не как экспериментальный закон, а как определение.*

Итак, устанавливая равенство двух сил, мы пользуемся двумя правилами: равенством двух взаимно уравнивающих сил и равенством действия противодействию. Но выше мы видели, что этих двух правил недостаточно; мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и допустить, что некоторые силы, как, например, вес тела, постоянны по величине и направлению. Но это третье правило, как я сказал, представляет собой экспериментальный закон и оно верно лишь приближенно; *опирающееся на него определение – плохое определение.*

Итак, нам приходится вернуться к определению Кирхгофа: *сила равна массе, умноженной на ускорение.* Теперь этот «закон Ньютона» выступает уже не как экспериментальный

закон, а только как определение. Но это определение еще недостаточно, так как мы не знаем, что такое масса. Правда, он позволяет нам вычислить отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты, но он ничего не сообщает нам об отношении двух сил, приложенных к двум различным телам.

Для дополнения его придется снова прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенство действия и противодействия), рассматривая последний опять-таки не как экспериментальный закон, а как определение. Два тела  $A$  и  $B$  действуют друг на друга; ускорение  $A$ , умноженное на массу  $A$ , равно действию  $B$  на  $A$ , таким же образом, произведение ускорения  $B$  на его массу равно противодействию  $A$  на  $B$ . И так как по определению действие равно противодействию, то массы  $A$  и  $B$  будут обратно пропорциональны ускорениям двух этих тел. Этим отношение наших двух масс определено, и дело опыта – проверить, что это отношение постоянно.

Все было бы хорошо, если бы два тела  $A$  и  $B$  были единственными, с которыми приходится считаться, и были изолированы от действия остального мира. Но этого нет; ускорение тела  $A$  зависит не только от действия тела  $B$ , но и от действия множества других тел:  $C$ ,  $D$  и т. д. Поэтому, чтобы применить предыдущее правило, нужно было бы разложить ускорение тела  $A$  на несколько составляющих и выделить из них ту, которая обусловлена действием тела  $B$ .

Это разложение было бы еще возможно, если бы мы до-

*пустили*, что действие  $C$  на  $A$  просто прикладывается к действию  $B$  на  $A$ , так что присутствие тела  $C$  не изменяет действия  $B$  на  $A$  и присутствие  $B$  не изменяет действия  $C$  на  $A$ ; следовательно, если бы мы допустили, что любые два тела притягиваются, что их взаимное действие направлено по соединяющей их прямой и зависит только от их расстояния, словом – если бы мы допустили *гипотезу центральных сил*.

Известно, что для определения масс небесных тел пользуются совершенно иным принципом. Закон тяготения учит нас, что притяжение двух тел пропорционально их массам; если  $r$  есть расстояние между ними,  $m$  и  $m'$  – их массы,  $K$  – некоторая постоянная, то притяжение их будет равно

$$\frac{Kmm'}{r^2}$$

То, что измеряют в этом случае, не есть масса как отношение силы к ускорению – это есть масса притягивающая; это – не инерция тела, а его притягательная способность.

Применение такого косвенного приема не является теоретически необходимым. Легко могло бы случиться, что притяжение было бы обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи пропорционально произведению масс; оно равнялось бы

$$\frac{f}{r^2}$$

Но равенство:

$$F = Kmm'$$

не имело бы смысла. При таких условиях все-таки было бы возможно на основании наблюдений над *относительными* движениями небесных тел измерять их массы.

Но имеем ли мы право допускать гипотезу центральных сил? Верна ли она в точности? Можно ли быть уверенным, что она никогда не окажется в противоречии с опытом? Кто взял бы на себя смелость утверждать это? А ведь если нам придется оставить эту гипотезу, то рухнет и все здание, воздвигнутое с таким трудом. И тогда мы уже не имеем более права говорить о составляющей ускорения  $A$ , зависящей от действия  $B$ . Мы не имеем никакого средства отличить ее от той, которая обусловлена действием  $C$  или другого тела. Правило для измерения масс становится неприложимым.

Что же тогда остается от принципа равенства действия и противодействия? Если гипотеза центральных сил отброшена, то этот принцип, очевидно, должен быть сформулирован так: геометрическая равнодействующая всех сил, приложенных к различным телам системы, изолированной от всяко-

го внешнего воздействия, равна нулю. Или, иными словами: *движение центра тяжести этой системы является прямолинейным и равномерным.*

Здесь-то, казалось бы, мы имеем средство определить массу: положение центра тяжести зависит, очевидно, от значений, какие мы припишем массам; надо распределить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейно и равномерно; если третий закон Ньютона верен, это всегда возможно и может быть выполнено вообще только одним способом.

Однако дело в том, что не существует системы, которая была бы изолирована от всякого внешнего воздействия; все части Вселенной подвержены более или менее сильному воздействию со стороны всех других частей. *Закон движения центра тяжести строго верен только в применении ко всей Вселенной в целом.*

Но в таком случае, чтобы извлечь из него значения масс, нужно было бы наблюдать движение центра тяжести Вселенной. Нелепость этого следствия очевидна; мы знаем только относительные движения; движение центра тяжести Вселенной навсегда останется для нас неизвестным.

Итак, у нас не остается ничего, и все наши усилия были напрасны; нет иного выхода, как остановиться на следующем определении, которое является только признанием нашего бессилия: *массы суть коэффициенты, которые удобно ввести в вычисления.*

Мы могли бы перестроить всю механику, приписывая всем массам другие значения. Эта новая механика не была бы в противоречии ни с опытом, ни с общими принципами динамики (принципом инерции, пропорциональностью сил массам и ускорениям, равенством действия и противодействия, прямолинейным и равномерным движением центра тяжести, законом площадей). Только уравнения этой новой механики были бы *менее просты*. Говоря точнее, менее просты были бы только первые члены, т. е. те, которые нам уже открыл опыт. Быть может, удалось бы изменять массы в пределах малых величин так, чтобы простота *полных* уравнений ничего бы не теряла и не приобретала.

Герц задался вопросом, строго ли верны принципы динамики. «Многим физикам, – говорит он, – покажется невыполнимым, чтобы самый отдаленный опыт мог когда-нибудь что-нибудь изменить в незыблемых принципах механики; однако же то, что исходит из опыта, всегда может быть и поправлено опытом».

После того, что мы сейчас говорили, все эти опасения являются излишними. Принципы динамики выступали перед нами сначала как опытные истины; но мы вынуждены были пользоваться ими как определениями. Только *по определению* сила равна произведению массы на ускорение; вот принцип, который отныне поставлен вне пределов досягаемости любого будущего опыта. Точно так же и действие равно противодействию только по определению. Но тогда, скажут, эти

недоступные проверке принципы абсолютно лишены всякого значения; опыт не может им противоречить; но они не могут и научить нас ничему полезному; зачем же тогда изучать динамику?

Такой слишком поспешный приговор был бы несправедлив. Правда, в природе нет системы, совершенно изолированной, совершенно изъятой от всякого внешнего воздействия; но есть системы *почти* изолированные.

Наблюдая подобную систему, можно изучать не только относительное движение ее различных частей – одних по сравнению с другими, – но и движение ее центра тяжести относительно других частей Вселенной. Тогда мы убеждаемся, что движение этого центра тяжести почти прямолинейно и равномерно сообразно с третьим законом Ньютона.

Это – опытная истина; но она не может быть поколеблена опытом. В самом деле, что мог бы открыть нам более точный опыт? Он открыл бы, что закон только приближенно верен; но это мы уже знаем.

*Теперь выясняется, каким образом опыт, с одной стороны, мог служить основанием для принципов механики, а с другой – никогда не будет в состоянии стать с ними в противоречие.*

Антропоморфная механика. Кое-кто скажет: Кирхгоф только поддался общей склонности математиков к номинализму; талант, присущий ему как физику, не предохранил его от этого. Он сделал попытку дать определение силы и

взял для этого первое попавшееся предложение; но в определении силы мы и не нуждаемся: идея силы есть понятие первичное, которое ни к чему не сводится и через что-либо не определяется, мы все знаем, что это такое, — мы имеем его в прямой интуиции. Эта прямая интуиция проистекает из понятия усилия (*de la notion d'effort*), хорошо знакомого нам с детства.

Но если бы даже эта прямая интуиция и открывала нам истинную природу силы самой по себе, она была бы недостаточна для обоснования механики; мало того, она была бы совсем бесполезна. Не важно знать, что такое сила, а важно знать, как ее измерить.

Все, что не научает нас измерять силу, так же бесполезно механику, как было бы, например, бесполезно субъективное понятие теплого и холодного для физика, изучающего теплоту. Это субъективное понятие не может быть переведено на язык чисел; значит, оно бесполезно: ученый, у которого кожа была бы абсолютно дурным проводником тепла и который, следовательно, никогда не испытывал бы ощущений ни холода, ни тепла, мог бы не хуже других наблюдать термометр, и этого ему было бы достаточно, чтобы построить всю теорию тепла.

Так и непосредственное понятие усилия не может служить нам для измерения силы; ясно, например, что, поднимая тяжесть в пятьдесят килограммов, я утомился бы сильнее, чем человек, привыкший таскать тяжести. Более того: это поня-

тие усилия не открывает нам истинной природы силы; оно сводится в конце концов к воспоминанию мускульных ощущений; но никто не стал бы утверждать, что Солнце испытывает мускульное ощущение, притягивая Землю.

Все, что можно найти в нем, есть символ, менее точный и менее удобный, чем стрелки, которыми пользуются геометры, но столь же далекий от действительности.

Антропоморфизм сыграл важную историческую роль в происхождении механики; быть может, он доставит иной раз символ, который покажется некоторым умам удобным; но он не может обосновать ничего, что имело бы истинно научный или истинно философский характер.

«Школа нити». Андрад в своих «Лекциях по физической механике» возродил антропоморфную механику. Школе механиков, к которой принадлежит Кирхгоф, он противопоставляет ту, которую он довольно своеобразно называет школой нити.

Эта школа стремится свести все к «рассмотрению некоторых материальных систем с ничтожно малой массой, находящихся в состоянии напряжения и способных передавать значительные силы отдаленным телам, – систем, идеальным типом которых является *нить*».

Нить, передающая какую-нибудь силу, под действием ее слегка удлиняется; направление нити указывает нам направление силы, а величина последней измеряется удлинением нити.

Поэтому можно предпринять, например, такой опыт. Тело  $A$  прикреплено к нити; к другому ее концу прилагают силу, величину которой изменяют до тех пор, пока нить не получит удлинения  $\alpha$ ; замечают ускорение тела  $A$ ; затем отвязывают  $A$  и прикрепляют тело  $B$ ; снова прилагают ту же или другую силу и изменяют ее до тех пор, пока нить снова получит удлинение  $\alpha$ ; замечают ускорение тела  $B$ . Затем опыт повторяют как с телом  $A$ , так и с телом  $B$ , но уже таким образом, чтобы нить получала удлинение  $\beta$ . Четыре отмеченных ускорения должны быть пропорциональными. Таким образом получается опытная проверка сформулированного выше закона ускорения.

Далее подвергают тело совместному действию нескольких тождественных нитей, равно натянутых, и исследуют на опыте, как должны быть расположены все эти нити, чтобы тело оставалось в равновесии. Получается опытная проверка правила сложения сил.

Однако чего же мы достигли в конце концов? Мы определили силу, приложенную к нити, деформацией, испытываемой этой нитью, – это довольно основательно; мы допустили затем, что если тело привязано к нити, то сила, передаваемая ему этой нитью, равна действию, которое это тело оказывает на нить; в конце концов мы воспользовались принципом равенства действия противодействию, рассматривая его не как опытную истину, но как само определение силы.

Это определение совершенно так же условно, как и опре-

деление Кирхгофа, но оно гораздо менее общо. Не все силы могут быть передаваемы при помощи нитей (к тому же для возможности сравнивать их необходимо было бы, чтобы все они передавались совершенно одинаковыми нитями). Если бы даже допустить, что Земля привязана к Солнцу какой-нибудь невидимой нитью, то по меньшей мере надо согласиться с тем, что мы не имеем никакого средства измерить ее удлинение.

Следовательно, в девяти случаях из десяти наше определение было бы недостаточно; ему нельзя было бы придать никакого смысла и пришлось бы вернуться к определению Кирхгофа.

Но тогда к чему же весь этот окольный путь? Вы допускаете известное определение силы, которое имеет смысл только в некоторых частных случаях. В этих случаях вы убеждаетесь при помощи опыта, что оно приводит к закону ускорения. Опираясь на этот опыт, вы принимаете затем закон ускорения за определение силы во всех других случаях.

Не проще ли было бы смотреть на закон ускорения как на определение во всех случаях и рассматривать перечисленные опыты не как подтверждение этого закона, а как проверку принципа противодействия или как доказательство того, что деформации упругого тела зависят только от сил, действующих на это тело? Мы не говорим уже о том, что условия, в которых ваше определение могло бы быть принято, никогда не выполняются в совершенстве – что нить никогда

не бывает лишена массы, что она никогда не бывает изолирована от действия других сил, кроме противодействия тел, привязанных к ее концам.

Тем не менее идеи Андрада очень интересны; хотя они не удовлетворяют нашей логической потребности, зато они позволяют лучше понять историческое происхождение основных механических понятий. Размышления, которые они вызывают у нас, показывают нам, как человеческий ум поднимался от наивного антропоморфизма к современным научным идеям.

В точке отправления мы видим опыт, имеющий весьма частное значение и вообще довольно грубый; в конечной точке имеем совершенно точный закон, достоверность коего мы принимаем за абсолютную. Этой достоверностью наделили его мы сами, – так сказать, по доброй воле, – рассматривая его как результат соглашения.

Значит, закон ускорения, правило сложения сил – только произвольные соглашения? Да, это соглашения, но не произвольные. Они были бы произвольными, если бы мы потеряли из виду те опыты, которые привели основателей науки к их принятию и которые, как бы несовершенны они ни были, достаточны для их оправдания. Хорошо, если время от времени наше внимание бывает обращено на опытное происхождение этих соглашений.

## Глава VII. Движение относительное и движение абсолютное

**Принцип относительного движения.** Были попытки связать закон ускорения с некоторым более общим принципом. Движение всякой системы должно подчиняться одним и тем же законам независимо от того, относить ли его к неподвижным осям или к подвижным, перемещающимся прямолинейно и равномерно. Это – принцип относительного движения, который внушается нам двумя обстоятельствами: во-первых, его подтверждает самый обыденный опыт, и, во-вторых, противоположное допущение совершенно противоречило бы нашему разуму.

Итак, допустим его и рассмотрим тело, находящееся под действием силы. Относительное движение этого тела для наблюдателя, перемещающегося с постоянной скоростью, равной начальной скорости тела, должно быть таким же, каким было бы абсолютное движение этого тела, если бы оно выходило из состояния покоя. Из этого заключают, что ускорение тела не должно зависеть от его абсолютной скорости, и отсюда пытаются извлечь доказательство закона ускорения.

Долгое время следы этого доказательства сохранялись в экзаменационных программах на степень бакалавра философских наук. Но эта попытка, очевидно, безнадежна. Препятствие, мешавшее нам доказать закон ускорения, было

обусловлено отсутствием определения силы, и оно несколько не устраняется, так как приведенный принцип не дает требуемого определения.

Но принцип относительного движения от этого не делается менее интересным; он заслуживает изучения сам по себе. Постараемся прежде всего дать ему точную формулировку.

Выше мы сказали, что ускорения различных тел, входящих в состав изолированной системы, зависят только от их скоростей и положений (относительных, а не абсолютных), если только подвижные оси, к которым отнесено движение, перемещаются прямолинейно и равномерно. Или, если угодно, эти ускорения зависят только от разностей скоростей и разностей координат тел, а не от абсолютных значений этих скоростей и координат.

Если этот принцип верен для относительных ускорений (или, лучше сказать, для разностей ускорений), то, сочетая его с законом противодействия, можно вывести, что он верен также и для абсолютных ускорений.

Остается, таким образом, рассмотреть, как можно доказать, что разности ускорений зависят только от разностей скоростей и координат или, говоря математическим языком, что эти разности координат удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка.

Можно ли это доказательство вывести из опытов или же из априорных соображений?

Припоминая сказанное выше, читатель сам даст на это от-

вет. В самом деле, в такой формулировке принцип относительного движения очень похож на то, что выше я назвал обобщенным принципом инерции. Это не совсем то же самое, потому что здесь речь идет о разностях координат, а не о самих координатах. Следовательно, новый принцип учит нас кое-чему большему сравнительно с прежним. Однако те же рассуждения приложимы и к нему, и они привели бы к тем же заключениям; возвращаться к этому было бы бесполезно.

**Аргумент Ньютона.** Здесь мы сталкиваемся с вопросом, крайне важным и в какой-то степени внушающим беспокойство. Я сказал, что принцип относительного движения не только был для нас результатом опыта, но и что а priori никакая иная гипотеза не допускается нашим разумом.

Но тогда почему принцип верен только в случае прямолинейного и равномерного движения подвижных осей? Казалось бы, он должен внушаться нам с той же силой и в случае, когда это движение переменнo или, по крайней мере, когда оно сводится к равномерному вращению. Однако в этих двух случаях принцип неверен.

Я не стану подробно останавливаться на том случае, когда движение осей прямолинейно, но не равномерно; парадокс устраняется сейчас же при исследовании. Я нахожусь в вагоне, и если поезд, натолкнувшись на какое-нибудь препятствие, внезапно останавливается, я буду отброшен на противоположную скамейку, хотя прямо на меня не действовала

никакая сила. Здесь нет ничего загадочного: я не подвергся действию никакой внешней силы, зато поезд испытал внешний толчок. Нет ничего парадоксального в том, что относительное движение двух тел оказывается возмущенным, раз движение того или другого тела изменено внешней причиной.

Остановлюсь подробнее на случае относительных движений, относимых к равномерно вращающимся осям. Если бы небо было беспрестанно покрыто тучами, если бы мы не имели никакого средства наблюдать светила, мы все-таки могли бы заключить, что Земля вращается; мы узнали бы об этом по ее сжатию или – еще лучше – из опыта с маятником Фуко.

Однако имело ли бы смысл говорить в этом случае, что Земля вращается? Если нет абсолютного пространства, то как можно вращаться, не вращаясь по отношению к чему-либо, а с другой стороны, как могли бы мы принять заключение Ньютона и верить в абсолютное пространство?

Но недостаточно констатировать, что все возможные решения одинаково не удовлетворяют нас; надо для каждого из них проанализировать основания, по которым мы отвергаем его, чтобы сделать наш выбор сознательно. Да простятся мне поэтому следующие длинные рассуждения.

Вернемся к нашему воображаемому случаю: густые тучи скрывают звезды от людей, и те не могут наблюдать их и даже не знают об их существовании. Как эти люди узнают, что Земля вращается? Еще увереннее, чем наши предки,

они будут считать Землю, которая носит их, неподвижной и непоколебимой; им придется слишком долго ждать появления Коперника. Но, наконец, этот Коперник все-таки явится. Почему же это должно случиться?

Механики воображаемого нами мира сначала не натолкнулись бы ни на какое безусловное противоречие. В теории относительного движения рассматривают, кроме реальных сил, две фиктивные силы, которые называются: одна – обыкновенной, а другая – сложной центробежной силой. Наши воображаемые ученые могли бы, следовательно, все объяснить, рассматривая эти две силы как реальные, и они не увидели бы здесь противоречия с обобщенным принципом инерции, так как эти силы зависели бы: одна, подобно действительно существующему притяжению, от относительных положений различных частей системы; другая, подобно реальному трению, от их относительных скоростей.

Тем не менее некоторые трудности не замедлили бы пробудить их внимание. Если бы им удалось осуществить изолированную систему, то движение центра тяжести этой системы по траектории, почти прямолинейной, не имело бы места. Для объяснения этого факта они могли бы сослаться на центробежные силы, которые они рассматривали бы как реальные и которые они, несомненно, приписали бы взаимным действиям тел. Но они увидели бы, что эти силы не уничтожаются на значительных расстояниях, т. е. по мере того, как изоляция становилась бы совершенной: напротив, центро-

бежная сила бесконечно возрастает с расстоянием.

Это затруднение казалось бы им уже довольно значительным; однако оно не остановило бы их надолго. Они не замедлили бы вообразить себе какую-нибудь среду, крайне тонкую, вроде нашего эфира, в которой плавали бы все тела и которая оказывала бы на них отталкивающее действие.

Но это не все. Пространство симметрично, а между тем законы движения не представляли бы симметрии; эти законы должны были бы отличать правую сторону от левой. Увидели бы, например, что циклоны вращаются всегда в одну и ту же сторону, между тем как по симметрии можно было бы ожидать этого вращения как в ту, так и в другую сторону, безразлично в какую. Если бы ценой труда наши ученые пришли к представлению о совершенной симметрии своей Вселенной, то эта симметрия не осуществлялась бы, хотя и не было бы никакого видимого основания для преимущественного нарушения ее в одну определенную сторону.

Без сомнения, они нашлись бы и здесь: они придумали бы что-нибудь, во всяком случае не более странное, чем хрустальные сферы Птолемея, и так нагромождали бы все более сложные построения, пока долгожданный Коперник не устранил бы одним ударом все эти нагромождения, сказав: гораздо проще допустить, что Земля вращается.

И совершенно так же, как наш Коперник сказал нам: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы астрономии выражаются более простым языком, тот

Коперник сказал бы: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы механики выражаются более простым языком.

Это не противоречит тому, что абсолютное пространство – та, так сказать, веха, к которой надо было бы отнести Землю, чтобы знать, действительно ли она вращается, – объективно не существует. Ведь и утверждение: «Земля вращается» не имеет никакого смысла, ибо никакой опыт не позволит проверить его; ибо такой опыт не только не мог бы быть ни осуществлен, ни вызван смелой фантазией Жюль Верна, но даже не мог бы быть понят без противоречия! Или, лучше сказать, два положения: «Земля вращается» и «удобнее предположить, что Земля вращается» имеют один и тот же смысл; в одном ничуть не больше содержания, чем в другом.

Может быть, кто-нибудь останется еще недоволен этим и найдет даже что-то неприятно поражающее в том, что среди всех гипотез или – лучше – среди всех соглашений, которые мы можем сформулировать относительно этого предмета, есть одно, которое удобнее других.

Но если мы без труда допустили это, когда речь шла о законах астрономии, почему это должно смущать, если дело касается механики?

Мы видели, что координаты тел определяются дифференциальными уравнениями второго порядка, и то же самое имеет место для разностей этих координат. Это – то, что мы назвали обобщенным принципом инерции и принципом от-

носительного движения.

Если бы расстояния этих тел определялись также дифференциальными уравнениями второго порядка, то, кажется, ум должен бы быть вполне удовлетворен. В какой мере он получает это удовлетворение и почему он им не довольствуется?

Чтобы дать себе в этом отчет, лучше всего взять простой пример. Вообразим систему, аналогичную нашей Солнечной системе, но такую, что из нее нельзя было бы видеть неподвижных звезд, не принадлежащих к этой системе, так что астрономы могли бы наблюдать только взаимные расстояния планет и Солнца, но не абсолютные долготы планет. Если мы выведем непосредственно из закона Ньютона дифференциальные уравнения, определяющие изменение этих расстояний, то эти уравнения не будут второго порядка. Я хочу сказать, что если бы, кроме закона Ньютона, были известны начальные значения этих расстояний и их производных по времени, то этого было бы достаточно для определения значений тех же расстояний для какого-нибудь последующего момента. Недоставало бы еще одного данного, и этим данным могло бы быть, например, то, что астрономы называют константой площадей.

Но здесь можно стать на две различные точки зрения; мы можем различать два рода констант. В глазах физика мир сводится к ряду явлений, зависящих единственно, с одной стороны, от начальных явлений, с другой – от законов, свя-

зывающих последующие явления с предыдущими. Если теперь наблюдение откроет нам, что некоторая величина есть константа, то нам представится выбор между двумя точками зрения.

Или мы допустим, что существует закон, требующий неизменяемости этой величины, но дело случая, что она в начальный момент имела именно такое значение, а не иное, — значение, которое она должна была потом сохранять. Такую величину можно было бы назвать тогда случайной константой.

Или, напротив, мы допустим, что существует закон природы, сообщающий этой величине именно такое значение, а не иное. Здесь мы будем иметь то, что можно назвать существенной константой.

Например, в силу законов Ньютона время обращения Земли должно быть постоянно. Но если оно равно 366 звездным суткам с дробью, а не 300 или 400, то это — результат какой-то неизвестной мне начальной случайности. Это — случайная константа. Если, напротив, показатель степени расстояния, входящий в выражение гравитационной силы, равен 2, а не 3, то это не случайно — этого требует закон Ньютона. Это — существенная константа.

Я не знаю, будет ли законно само по себе придавать какое-то значение случайности и не является ли такое разграничение искусственным; во всяком случае, пока в природе существуют тайны, оно будет применяться с широким про-

изволом, всегда оставаясь ненадежным.

Что касается константы площадей, то мы привыкли рассматривать ее как случайную. Так ли поступили бы наши воображаемые астрономы? Если бы они имели возможность сравнивать две различные солнечные системы, то у них появилась бы идея, что эта константа может иметь различные значения; но я как раз предположил вначале, что их система изолирована и они не могли наблюдать никакого светила, не принадлежащего к их системе. В этих условиях они могли бы знать единственную константу, которая имела бы единственное, абсолютно неизменяемое значение; без сомнения, они были бы склонны рассматривать ее как константу существенную.

Выскажу попутно несколько слов в предупреждение возражений: обитатели нашего воображаемого мира не могли бы ни наблюдать, ни определить константу площадей, как это делаем мы, потому что абсолютные долги были бы им недоступны; но это не помешало бы им скоро подметить определенную константу, которая естественно входила бы в их уравнения и которая была бы не чем иным, как тем, что мы называем константой площадей.

Но тогда бы имело место следующее. Если рассматривать константу площадей как существенную, как обусловленную законом природы, то для вычисления расстояний планет в любой момент достаточно знать начальные значения этих расстояний и их первых производных. С этой новой точки

зрения расстояния будут определяться дифференциальными уравнениями второго порядка.

Однако был ли бы ум этих астрономов вполне удовлетворен? Я не думаю; прежде всего, они скоро заметили бы, что, продифференцировав свои уравнения и таким образом повысив их порядок, они привели бы их к более простой форме. В особенности они были бы поражены трудностью, связанной с симметрией. Пришлось бы допускать различные законы, смотря по тому, представляет ли совокупность планет фигуру какого-либо определенного многогранника, в частности симметричного многогранника; этого следствия можно было бы избежать, только рассматривая константу площадей как случайную.

Я взял довольно частный пример, вообразив астрономов, которые совсем не занимаются земной механикой и кругозор которых ограничен Солнечной системой. Но наши заключения приложимы ко всем случаям. Наша Вселенная шире по сравнению с их миром, потому что у нас есть неподвижные звезды, но она все же ограничена, и поэтому мы могли бы так же рассуждать о нашей Вселенной, взятой в целом, как эти астрономы – о своей Солнечной системе.

В конце концов, как из всего этого видно, пришлось бы заключить, что порядок уравнений, определяющих расстояния, выше второго. Почему бы это могло смущать нас, почему мы находим вполне естественным, что ряд явлений зависит от начальных значений первых производных расстоя-

ний, и в то же время не решаемся допустить, что они могут зависеть от начальных значений вторых производных? Это может быть только следствием известных привычек, выработанных в нашем сознании постоянным изучением обобщенного принципа инерции и его следствий.

Значения расстояний во всякий момент зависят от их начальных значений, начальных значений их первых производных и еще от чего-то другого. Чем же является это другое?

Если не хотят признать в этом просто одну из вторых производных, то остается только выбор гипотез. Обыкновенно полагают, что это «другое» есть абсолютная ориентация Вселенной в пространстве или быстрота, с которой ориентация изменяется. Возможно и даже несомненно, что такая гипотеза является самой удобной для геометра; но она никак не самая удовлетворительная с точки зрения философа, потому что такой ориентации не существует.

Можно допустить, что это «другое» есть положение или скорость какого-нибудь невидимого тела: так и поступали те, которые даже дали этому телу название «альфа-тело», хотя нам и не суждено ничего знать об этом теле, кроме его названия. Это – уловка, совершенно аналогичная той, о которой я говорил в конце параграфа, посвященного моим размышлениям о принципе инерции.

Однако в конечном счете указанные трудности имеют искусственный характер. Все, что необходимо, – это то, чтобы будущие показания наших инструментов определялись толь-

ко теми показаниями, которые они нам дали или могли дать прежде. Но в этом отношении мы можем быть спокойны.

## Глава VIII. Энергия и термодинамика

**Энергетическая система.** Трудности, возникшие в классической механике, побудили некоторые умы отдать предпочтение новой системе – так называемой энергетике. Энергетическая система получила свое начало вслед за открытием принципа сохранения энергии. Окончательная форма была ей дана Гельмгольцем.

Начнем с определения двух величин, которые играют фундаментальную роль в этой теории. Это следующие величины: во-первых, *кинетическая энергия*, или живая сила; во-вторых, *потенциальная энергия*.

Все перемены, какие могут происходить с телами природы, управляются двумя экспериментальными законами:

1. Сумма кинетической энергии и потенциальной энергии не меняется. Это – принцип сохранения энергии.

2. Если система тел в момент  $t_0$  имеет конфигурацию  $A$ , а в момент  $t_1$  – конфигурацию  $B$ , то переход от первой конфигурации ко второй всегда совершается таким путем, что среднее значение разности между двумя видами энергии за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_1$  является величиной, самой малой из всех возможных. Это – принцип Гамильтона, представляющий одну из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория сравнительно с классической имеет следующие преимущества:

1) она является более полной, т. е. принцип сохранения энергии и принцип Гамильтона сообщают нам больше, чем сообщали основные принципы классической теории; они исключают некоторые движения, которые не реализуются в природе, но совместимы с классической теорией;

2) она освобождает нас от атомистической гипотезы, которую было почти невозможно избежать в классической теории.

Но в свою очередь энергетическая система создает и новые трудности. Именно, определение двух видов энергии представляет почти столь же значительные трудности, как и определение силы и массы в первой системе. Однако избавиться от них легче, по крайней мере в наиболее простых случаях.

Представим себе изолированную систему, состоящую из некоторого числа материальных точек; пусть эти точки находятся под действием сил, зависящих только от их расстояний и относительного расположения, но не зависящих от их скоростей. В силу принципа сохранения энергии система должна иметь силовую функцию.

В этом простом случае выражение принципа сохранения энергии крайне просто. Некоторая доступная измерению величина должна оставаться постоянной. Эта величина представляет собой сумму двух членов; первый зависит только

от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй представляет собой линейную функцию квадратов скоростей. Такое разложение может быть сделано только одним способом. Первый член, который я обозначу через  $U$ , будет потенциальной энергией, второй, который я обозначу через  $T$ , будет кинетической энергией.

Конечно, если  $T + U$  равняется постоянной величине, то это же самое будет иметь место для любой функции величины  $T + U$ , т. е. для

$$\varphi(T + U).$$

Но эта функция  $\varphi(T + U)$  не будет суммой двух членов, из которых один был бы независим от скоростей, а другой зависел бы линейно от их квадратов. Между функциями, сохраняющими постоянную величину, есть только одна, обладающая таким свойством, а именно  $T + U$  (или любая линейная функция  $T + U$  — это не имеет значения, ибо такая линейная функция всегда может быть приведена к виду  $T + U$  путем преобразования масштаба и перемены начала). Это выражение мы и назовем энергией; первый член будет иметь значение кинетической энергии, второй — значение потенциальной энергии. Таким образом, определение обоих видов энергии может быть доведено до конца без всякой двусмысленности. Точно так же может быть дано определение масс. Кинетическая энергия, или живая сила, весьма просто выражается через массы материальных точек и через их скорости, соотнесенные к какой-нибудь одной из них. Эти отно-

сительные скорости доступны наблюдению, и если мы будем знать выражение кинетической энергии как функции относительных скоростей, то массы представятся коэффициентами этого выражения.

Итак, в этом простом случае определение основных понятий является делом легким. Но трудности опять возникают в более сложных случаях, как, например, если силы зависят не только от расстояний, но и от скоростей. Вебер предполагает, что взаимодействие двух электрических частиц зависит не только от их расстояния, но также от их скорости и ускорения. Если бы материальные точки притягивались по тому же закону,  $U$  зависело бы от скоростей и могло бы содержать член, пропорциональный квадрату скорости. Но как в этом случае можно было бы среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, отличить те, которые относятся к  $T$ , и те, которые относятся к  $U$ ? Как, следовательно, различить два вида энергии? Даже больше того, как определить самую энергию? Ведь теперь мы не имеем уже никаких оснований предпочесть  $T + U$  какой-либо другой функции  $T + U$ , раз исчезло свойство, отличавшее  $T + U$  и состоявшее в возможности разделения ее на два слагаемых специальной формы.

Однако это не все. Необходимо принять в расчет не только механическую энергию в собственном смысле, но также другие виды энергии: теплоту, химическую энергию, электрическую энергию и другие. Тогда принцип сохранения энергии

примет вид

$$T + U + Q = \text{const},$$

где  $T$  означает воспринимаемую кинетическую энергию,  $U$  – потенциальную энергию положения, зависящую исключительно от расположения тел,  $Q$  – внутреннюю молекулярную энергию в тепловой, химической или электрической форме.

Все шло бы хорошо, если бы эти три члена можно было резко различить: если бы  $T$  было пропорционально квадратам скоростей,  $U$  не зависело ни от скоростей, ни от состояния тела,  $Q$  зависело не от скоростей и расположения тел, а исключительно от их внутреннего состояния. Тогда выражение энергии допускало бы только единственное разложение на три члена указанной формы. На самом деле это не так; рассмотрим наэлектризованные тела: электростатическая энергия, обусловленная их взаимодействием, будет, очевидно, зависеть от их заряда, т. е. от их состояния, но также и от их расположения. Если эти тела находятся в движении, то они будут действовать друг на друга электродинамически, и электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и их расположения, но и от их скоростей. Таким образом, у нас не оказывается никакого средства выделить три подразделения энергии, рассортировав члены так, чтобы каждый относился к  $T$ ,  $U$  и  $Q$  в отдельности.

Если  $T + U + Q$  есть постоянная величина, то постоянной будет и любая ее функция

$$\varphi(T + U + Q).$$

Если бы  $T + U + Q$  имело вышеуказанную специальную форму, неопределенности не могло бы возникнуть; между всеми функциями  $\varphi(T + U + Q)$ , сохраняющими постоянную величину, нашлась бы только одна, имеющая этот частный вид, и она была бы тем, что мы условились называть энергией. Но это, по вышесказанному, не выполняется: между функциями, сохраняющими неизменную величину, нет таких, которые бы в точности подходили под нашу специальную форму, – следовательно, как найти между ними ту, которую следует именовать энергией? У нас нет никакой путеводной нити для этих поисков.

Поэтому нам остается выразить принцип сохранения энергии только таким образом: *есть нечто, сохраняющее неизменную величину*. Но в такой форме он оказывается вне пределов досягаемости опыта и сводится к некоторого рода тавтологии, ибо ясно, что если мир управляется законами, то существуют некоторые величины, которые остаются постоянными. Подобно принципам Ньютона (и по тем же основаниям), принцип сохранения энергии, основанный на опыте, не может быть опровергнут этим последним.

Это исследование показывает, что с переходом от классической системы к системе энергетической осуществляется известный прогресс, но что в то же время этот прогресс недостаточен.

Еще более серьезным кажется мне другое возражение:

принцип наименьшего действия приложим к обратимым процессам; но он оказывается совершенно недостаточным, коль скоро речь идет о необратимых процессах. Попытка Гельмгольца распространить его на эту область явлений не имела и не могла иметь успеха: здесь все еще принадлежит будущему.

Самая формулировка принципа наименьшего действия имеет в себе нечто, неприятно поражающее наш ум. При переходе от одной точки к другой материальная частица, не подверженная действию какой-либо силы, но подчиненная условию не сходить с некоторой поверхности, движется по геодезической линии, т. е. по кратчайшему пути. Эта частица как будто бы знает ту точку, куда ее желают привести, предвидит время, которое она затратит, следуя по тому или иному пути, и, наконец, выбирает путь наиболее подходящий. В такой формулировке принципа частица представлена нам как бы одушевленным существом, обладающим свободой воли. Ясно, что следовало бы заменить эту формулировку другой, более подходящей, в которой, выражаясь языком философа, конечные причины не становились бы явным образом на место причин действующих.

**Термодинамика**<sup>8</sup>. Значение двух основных принципов термодинамики для всех областей физики становится с каждым днем все более важным. Оставляя предложенные сорок

---

<sup>8</sup> Следующие строки частично воспроизводят текст предисловия к моей книге «Термодинамика».

лет назад претенциозные теории, насыщенные молекулярными гипотезами, мы пытаемся ныне воздвигнуть все здание математической физики единственно на термодинамической основе.

Способны ли два принципа – Майера и Клаузиуса – сообщить этому зданию на известное время достаточную прочность? В этом никто не сомневается; но откуда мы получаем такую уверенность?

Один выдающийся физик говорил мне однажды по поводу закона погрешностей: «Все крепко верят в него: математики считают его результатом наблюдений, а наблюдатели – математической теоремой». В течение долгого времени можно было сказать то же самое относительно принципа сохранения энергии. Но в настоящее время всем уже известно, что он представляет собою экспериментальный факт.

Но в таком случае что дает нам право приписывать самому принципу большую общность и точность сравнительно с теми опытами, которые послужили для его доказательства? Это равносильно вопросу: законны ли делаемые на каждом шагу обобщения эмпирических данных? У меня не хватает смелости разбирать этот вопрос после того, как столько философов тщетно искали его решения. Достоверно одно: если бы мы не имели способности к обобщению, наука не могла бы существовать или, по крайней мере, свелась бы к простой описи, к установлению единичных фактов, – она не имела бы для нас никакой ценности, так как не могла бы удовлетво-

ритель наше стремление к порядку и гармонии и в то же время была бы неспособна делать предсказания. Обстоятельства, предшествовавшие известному факту, по всей вероятности, никогда более не повторятся в своей совокупности; поэтому первое обобщение необходимо уже просто для того, чтобы предвидеть, повторится ли этот факт после того, как произойдет самое незначительное изменение в этих обстоятельствах.

Но всякое положение можно обобщить бесчисленным множеством способов. Между всеми возможными обобщениями нам необходимо выбрать только одно, а именно самое простое. Таким образом, мы вынуждены поступать так, как если бы простой закон при прочих равных условиях имел бóльшую вероятность сравнительно со сложным законом.

Полвека тому назад было общераспространенным убеждение, что природа любит простоту. С тех пор мы имели от нее много опровержений. Ныне мы такой тенденции уже не приписываем природе и сохраняем от этой тенденции лишь то, что необходимо, чтобы наука не уклонялась со своего пути. Таким образом, формулируя общий, простой и точный закон на основании сравнительно малочисленных и не абсолютно точных опытов, мы лишь повинемся необходимости, которой не может избежать человеческий ум. Но здесь имеется и кое-что большее, и это объясняет, почему я так настойчив.

Никто не сомневается в том, что принципу Майера пред-

стоит пережить все частные законы, из которых он был извлечен, подобно тому как закон Ньютона пережил законы Кеплера, послужившие его источником и являющиеся лишь приближенными, если принять в расчет возмущения. Спрашивается, почему же этот принцип занимает привилегированное положение среди всех физических законов?

Для этого имеется ряд оснований – не очень значительных. Прежде всего, полагают, что мы не можем его отвергнуть, даже сомневаться в его абсолютной строгости, без того чтобы не допустить возможности «вечного движения»; мы, разумеется, не боимся такой перспективы, но считаем, что осторожнее признать принцип Майера, чем его отрицать. Быть может, это и не вполне точно: невозможность «вечного движения» влечет за собой сохранение энергии лишь для обратимых явлений.

Величавая простота принципа Майера также способствует укреплению нашей веры в него. В законе, выведенном непосредственно из опыта, каков, например, закон Мариотта, подобная простота внушала бы нам скорее недоверие. Но здесь это не так. Здесь мы видим, как элементы, которые на первый взгляд кажутся лишенными взаимной связи, неожиданно упорядочиваются, образуя гармоническое целое; и мы отказываемся думать, чтобы эта непредвиденная гармония была следствием простого случая. Наше приобретение как будто делается тем дороже для нас, чем больших усилий оно нам стоило; мы как будто тем сильнее убеждаемся в том, что

действительно исторгли у природы ее тайну, чем ревнивее она, казалось, скрывала эту тайну от нас.

Однако все это – не слишком веские доводы; чтобы возвести закон Майера в ранг абсолютного принципа, нужно было бы представить более глубокий разбор вопроса. Но пытаясь выполнить это, мы видим, что этот абсолютный принцип нелегко даже сформулировать. В каждом частном случае мы ясно видим, что такое энергия, и можем определить ее – по крайней мере предварительно; но найти общее определение ее невозможно. Как только мы хотим выразить принцип во всей его общности и приложить его ко Вселенной, мы видим, что он, так сказать, испаряется и от него остается только следующее: *существует нечто, что остается постоянным.*

Но имеет ли это какой-нибудь смысл? По детерминистской гипотезе состояние Вселенной определяется чрезвычайно большим числом  $n$  параметров, которые я обозначу  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если известны значения параметров для одного какого-нибудь момента, а также производные этих параметров по времени, то можно высчитать значения их для всякого другого момента, предшествующего или последующего. Другими словами, наши  $n$  параметров удовлетворяют  $n$  дифференциальным уравнениям первого порядка. Эти уравнения имеют  $n - 1$  интегралов, не содержащих времени; таким образом, существует  $n - 1$  функций от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , сохраняющих неизменную величину. Поэтому, говоря, что существует нечто, что остается постоянным, мы высказываем

простую тавтологию. Трудно было бы даже сказать, которому из этих интегралов должно принадлежать название энергии.

Впрочем, принцип Майера понимается иначе, когда он прилагается к ограниченной системе. В этом случае принимают, что  $p$  из наших  $n$  параметров изменяются под влиянием самостоятельных причин, так что мы имеем всего  $n - p$  уравнений (вообще линейных) между нашими  $n$  параметрами и их производными.

Для большей простоты предположим, что сумма работ внешних сил равна нулю, так же как и сумма рассеянных системой количеств тепла. В таком случае принцип получит следующее выражение: существует такое сочетание этих  $n - p$  уравнений, первый член которого является точным дифференциалом; так как в силу наших  $n - p$  соотношений этот дифференциал равен нулю, то интеграл его равняется постоянной величине, и этот интеграл есть то, что называется энергией.

Но каким образом возможно, что некоторые из параметров обнаруживают изменения, независимые от остальных? Это имеет место лишь под воздействием внешних сил (хотя мы для простоты и предположили, что алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю). В самом деле, если бы система была совершенно изолирована от всякого внешнего воздействия, то знания величин наших  $n$  параметров в данный момент было бы достаточно для определения состояния системы в любой последующий момент (предполагая, что мы

по-прежнему держимся детерминистской гипотезы), т. е. мы опять встретили бы прежнюю трудность.

Если будущее состояние системы не вполне определяется ее настоящим состоянием, то это значит, что оно зависит еще от состояния тел, внешних по отношению к системе. Но в таком случае правдоподобно ли, чтобы между параметрами  $x$ , определяющими положение системы, существовали уравнения, не зависящие от состояния этих внешних тел? И если в некоторых случаях мы, по-видимому, можем их составить, то не является ли это лишь следствием нашего незнания, следствием того, что влияние этих тел слишком слабо, чтобы наш опыт мог его обнаружить?

Если система не рассматривается как вполне изолированная, то вероятно, что строго точное выражение ее внутренней энергии должно зависеть от состояния внешних тел. Кроме того, выше мы предположили, что сумма внешних работ равна нулю; если бы мы пожелали освободиться от этого несколько искусственного ограничения, формулировка принципа стала бы делом еще более трудным. Поэтому для формулировки принципа Майера в абсолютном смысле необходимо распространять его на всю Вселенную, а тогда перед нами встает та самая трудность, которой мы желали избежать. Говоря кратко и обычным языком, закон сохранения энергии может иметь только один смысл, а именно: существует некоторое свойство, присущее всем возможностям; но по детерминистской гипотезе существует лишь

единственная возможность, а тогда закон теряет свой смысл.

Напротив, при допущении индетерминистской гипотезы он имел бы смысл и тогда, когда бы мы пожелали придать ему абсолютное значение: он представился бы ограничением, наложенным на свободу.

Но слово «свобода» напоминает мне, что я выхожу за пределы физико-математической области. Поэтому я останавливаюсь и от всего предыдущего обсуждения сохраняю только один вывод: закон Майера является формой достаточно гибкой, чтобы можно было вложить в нее почти все, что угодно. Я не хочу этим сказать ни то, что он не соответствует никакой объективной реальности, ни то, что он сводится к простой тавтологии, так как в каждом частном случае он имеет совершенно ясный смысл, если только не пытаются возвести его до степени абсолютного принципа.

Самая гибкость его дает основание верить в его высокую жизнеспособность; а так как, с другой стороны, он не может исчезнуть иначе, как растворившись в гармонии высшего порядка, то мы с доверием можем опираться на него в наших работах, наперед зная, что наш труд не пропадет даром.

Почти все сказанное выше применимо к принципу Клаузиуса. Различие в том, что последнее выражается неравенством. Кто-нибудь мог бы сказать, что это – свойство всех физических законов, так как точность их всегда ограничена погрешностями наблюдения. Но законы эти имеют притязание быть по меньшей мере первым приближением, и есть на-

дежда на постепенное замещение их другими, все более точными. Напротив, если принцип Клаузиуса сводится к неравенству, то причина этого лежит не в несовершенстве наших средств наблюдения, а в самой природе вопроса.

## **Общие выводы из третьей части**

Итак, принципы механики представляются нам в двух различных аспектах. С одной стороны, это – истины, обоснованные опытом, подтверждающиеся весьма приближенно для систем почти изолированных. С другой стороны, это – постулаты, которые прилагаются ко всей Вселенной и считаются строго достоверными.

Если эти постулаты обладают общностью и достоверностью, каких недостает экспериментальным истинам, из которых они извлекаются, то это оттого, что они в результате проведенного анализа сводятся к простому соглашению, которое мы имеем право сформулировать, будучи заранее уверены, что никакой опыт не станет с ним в противоречие. Однако это соглашение не абсолютно произвольно; оно не вытекает из нашей прихоти; мы принимаем его, потому что известные опыты доказали нам его удобство. Так объясняется и то, почему опыт был в состоянии создать принципы механики, и то, почему он не сможет их ниспровергнуть.

Проведем сравнение с геометрией. Основные положения геометрии, как, например, постулат Евклида, суть также не

что иное, как соглашения, и было бы настолько же неразумно доискиваться, истинны ли они или ложны, как задавать вопрос, истинна или ложна метрическая система. Эти соглашения только удобны, и в этом нас убеждают известные опыты.

На первый взгляд аналогия является полной: роль опыта представляется в обоих случаях одной и той же. Кто-нибудь мог бы сказать: либо механика должна быть признаваема за науку экспериментальную, и тогда то же самое следует сказать про геометрию; либо, наоборот, геометрия является наукой дедуктивной, и тогда механика должна быть такой же.

Но подобное заключение было бы незаконно. Опыты, которые привели нас к принятию основных соглашений геометрии в качестве наиболее удобных, относятся к вещам, которые не имеют ничего общего с объектами изучения геометрии, они относятся к свойствам твердых тел, к прямолинейному распространению света. Это – опыты механические и оптические; их отнюдь нельзя рассматривать как опыты геометрические. А главное основание, по которому наша геометрия представляется нам удобной, – это то, что различные части нашего тела, наш глаз, наши члены обладают в точности свойствами твердых тел. В этом смысле нашими основоположными опытами являются прежде всего физиологические опыты, которые относятся не к пространству, составляющему предмет изучения для геометра, но к нашему собственному телу, т. е. к орудию, которым мы должны пользоваться при этом изучении.

Напротив, основные соглашения механики и те опыты, которыми доказывается их удобство, относятся к одним и тем же или к аналогичным предметам. Эти условные и общие принципы являются естественным и прямым обобщением принципов экспериментальных и частных.

Пусть не говорят, что здесь я провожу искусственные границы между науками; что если я отделяю геометрию в собственном смысле от изучения твердых тел, то я мог бы точно так же воздвигнуть стену между экспериментальной механикой и конвенциональной механикой общих принципов. В самом деле, кто не заметит, что, разделяя эти две науки, я исказил бы и ту и другую, что изолированная конвенциональная механика представляла бы собой нечто малозначащее, никак не могущее сравниться с величественным зданием геометрической науки?

Понятно теперь, почему преподавание механики должно оставаться экспериментальным. Только при таком методе оно может сделать понятным генезис науки, а это необходимо для полного понимания самой науки. Кроме того, механику изучают, чтобы ее применять; это возможно только при условии, что она остается объективной. Но, как мы видели, принципы механики, выигрывая в общности и достоверности, теряют в своей объективности. При первом ознакомлении с принципами особенно уместно подходить к ним с их объективной стороны; это можно сделать, только двигаясь от частного к общему, но не наоборот.

Принципы – это соглашения и скрытые определения. Тем не менее они извлечены из экспериментальных законов; эти последние были, так сказать, возведены в ранг принципов, которым наш ум приписывает абсолютное значение.

Некоторые философы довели процесс обобщения до крайностей; по их мнению, принципы составляют всю науку, которая, таким образом, вся принимает характер условного знания. Это парадоксальное учение, называемое номинализмом, не выдерживает критики.

Каким образом закон может стать принципом? Он выражал соотношение между двумя реальными членами  $A$  и  $B$ , но он не был строго верным, а лишь приближенным. Мы произвольно вводим промежуточный, более или менее фиктивный член  $C$ , и  $C$  в силу определения связано с  $A$  точным отношением, которое выражено в законе. Таким образом, наш закон разложился на абсолютный, строгий принцип, выражающий соотношение  $A$  и  $C$ , и на приближенный, подлежащий пересмотру экспериментальный закон, который выражает соотношение между  $C$  и  $B$ . Ясно, что как бы далеко ни простиралось это расчленение, такие законы всегда будут иметь место.

Мы вступаем теперь в область законов в собственном смысле.

# Часть IV. Природа

## Глава IX. Гипотезы в физике<sup>9</sup>

Значение опыта и обобщения. – Опыт – единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью. Эти два положения никто не может оспорить.

Однако если опыт – все, то какое место остается для математической физики? Зачем экспериментальной физике это пособие, которое кажется бесполезным, а может быть, даже опасным? Тем не менее математическая физика существует; она оказала нам неопровержимые услуги. Это – факт, нуждающийся в объяснении.

Дело в том, что одних наблюдений недостаточно; ими надо пользоваться, а для этого необходимо их обобщать. Так всегда и поступали; однако поскольку память о бывших ошибках делала человека все более осмотрительным, то наблюдать стали все больше, а обобщать все меньше.

Каждое поколение смеется над предыдущим, обвиняя его в слишком поспешных и слишком наивных обобщениях. Декарт выражал сожаление по адресу философов-ионийцев;

---

<sup>9</sup> Главы IX и X представляют собой доклады А. Пуанкаре на Международном конгрессе физиков в Париже в 1900 г. – *Прим. ред.*

в свою очередь он вызывает улыбку у нас; без сомнения, когда-нибудь наши потомки посмеются над нами.

Но в таком случае нельзя ли нам уже теперь избрать путь, который устранил бы эти предвидимые нами насмешки? Нельзя ли нам удовольствоваться одним только чистым опытом?

Нет, это невозможно; такое стремление свидетельствовало бы о полном незнакомстве с истинным характером науки. Ученый должен систематизировать; наука строится из фактов, как дом из кирпичей; но простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней – домом.

И, прежде всего, ученый должен предвидеть. Карлейль<sup>10</sup> в одном месте пишет примерно так: «Только факт имеет ценность; Иоанн Безземельный прошел здесь: вот что заслуживает удивления, вот реальность, за которую я отдал бы все теории мира». Карлейль был соотечественником Бэкона; подобно последнему он постоянно пропагандировал свою веру *for the God of Things as they are*<sup>11</sup>; но Бэкон не сказал бы предыдущих слов. Это – язык историка. Физик скорее выра-

---

<sup>10</sup> *Томас Карлейль* (1795–1881) – британский писатель, публицист, историк и философ шотландского происхождения, автор многотомных сочинений «Французская революция» (1837), «Герои, почитание героев и героическое в истории» (1841), «История жизни Фридриха II Прусского» (1858–65). Исповедовал романтический «культ героев» – исключительных личностей вроде Наполеона, которые своими делами исполняют божественное предназначение и двигают человечество вперед, возвышаясь над толпой ограниченных обывателей. Известен также как один из блестящих стилистов викторианской эпохи.

<sup>11</sup> В бога вещей, каковы они суть (*англ.*).

зился бы так: «Иоанн Безземельный прошел здесь; это меня мало интересует, потому что больше это не повторится».

Все мы знаем, что опыты бывают хорошие и плохие. Накопление плохих опытов совершенно бесполезно; будь их сотни или тысячи – все равно, довольно появиться единственному труду настоящего мастера, каковым был, например, Пастер, чтобы все они потонули в забвении. Это хорошо понимал Бэкон, изобретший термин *experimentum crucis*<sup>12</sup>. Но Карлейль этого не понял бы. Факт – всегда факт: студент сделал отсчет по своему термометру, не приняв никаких предосторожностей; пусть так – все же он сделал отсчет, и если во внимание принимаются одни только факты, то вот перед нами реальность такого же ранга, как странствования короля Иоанна Безземельного.

Почему же факт, который сообщил этот студент, не представляет интереса, между тем как факт, который умелый физик изложит в лекции, будет, напротив, очень важным? Это потому, что из первого сообщения мы не в состоянии сделать никакого вывода. Что же такое – хороший опыт? Это – опыт, который дает нам нечто большее по сравнению с единичным фактом; это – опыт, дающий нам возможность предвидеть, т. е. позволяющий делать обобщение.

В самом деле, без обобщения невозможно и предвидение. Условия произведенного опыта никогда не повторяются в точности. Наблюденный факт никогда не начнется сначала;

---

<sup>12</sup> Решающий эксперимент (*лат.*).

единственное, что можно утверждать, – это что при аналогичных условиях произойдет аналогичное явление. Поэтому, чтобы предвидеть, надо по крайней мере опираться на аналогию, т. е. обобщать.

Как бы робок ни был исследователь, ему необходимо делать интерполяцию; опыт дает нам лишь некоторое число отдельных точек: их надобно соединить непрерывной линией, и это – настоящее обобщение. Этого мало: проводимую кривую строят так, что она проходит между наблюдаемыми точками – близ них, но не через них. Таким образом, опыт не только обобщается, но и подвергается исправлению; а если бы физик захотел воздержаться от этих поправок и на самом деле удовольствоваться голым опытом, то ему пришлось бы высказывать очень странные законы.

Итак, голые факты не могут нас удовлетворить; иными словами, нам нужна наука упорядоченная, или, лучше сказать, организованная.

Нередко говорят, что следует экспериментировать без предвзятой идеи. Это невозможно; это не только сделало бы всякий опыт бесплодным, но это значило бы желать невозможного. Всякий носит в себе свое миропредставление, от которого не так-то легко освободиться. Например, мы пользуемся языком, а наш язык пропитан предвзятыми идеями и этого нельзя избежать; притом эти предвзятые идеи неосознанны, и поэтому они в тысячу раз опаснее других.

Можно ли сказать, что, допустив вторжение вполне осо-

знанных нами предвзятых идей, мы этим усиливаем вред? Не думаю; по моему мнению, они скорее будут служить друг другу противовесом, так сказать, противоядием; они вообще будут плохо уживаться друг с другом; одни из них окажутся в противоречии с другими, и, таким образом, мы будем вынуждены рассматривать проблему с различных точек зрения. Этого достаточно для нашего высвобождения; кто может выбирать себе господина, тот уже больше не раб.

Итак, благодаря обобщению каждый наблюденный факт позволяет нам предвидеть множество других; однако не следует забывать, что из них только один первый достоверен, а все другие только вероятны. Как бы прочно обоснованным ни казалось нам наше предвидение, все же мы никогда не имеем *абсолютной уверенности* в том, что оно не будет опровергнуто опытом, предпринятым в целях его проверки. Однако вероятность часто бывает достаточно велика, чтобы практически мы могли ею удовлетвориться. Лучше предвидеть без абсолютной уверенности, чем не предвидеть вовсе.

Из предыдущего ясно, что не следует упускать ни одного случая выполнить проверочные опыты. Но всякое экспериментальное исследование продолжительно и сопряжено с трудностями; работников мало; число же фактов, которые нам нужно предвидеть, неизмеримо; в сравнении с количеством их число возможных для нас проверок всегда будет величиной ничтожно малой.

Из того немногого, что может быть нами достигнуто

непосредственно, нужно извлечь возможно большую пользу; нужно, чтобы каждый опыт позволял нам возможно больше увеличить как численность, так и вероятность предвидимых нами фактов. Задача состоит в том, чтобы повысить производительность научного познания.

Я позволю себе сравнить науку с библиотекой, которая должна непрерывно расширяться; но библиотекарь располагает для своих приобретений лишь ограниченными кредитами; он должен стараться не тратить их понапрасну. Такая обязанность делать приобретения лежит на экспериментальной физике, которая одна лишь в состоянии обогащать библиотеку. Что касается математической физики, то ее задача состоит в составлении каталога. Если каталог составлен хорошо, то библиотека не делается от этого богаче, но читателю облегчается пользование ее сокровищами. С другой стороны, каталог, указывая библиотекарю на пробелы в его собраниях, позволяет ему дать его кредитам рациональное употребление; а это тем более важно ввиду их совершенной недостаточности.

Итак, вот в чем значение математической физики. Она должна руководить обобщением, руководить так, чтобы от этого увеличивалась производительность науки. Нам остается рассмотреть, какими путями она этого достигает и как может она это выполнить без опасных уклонений с правильного пути.

**Единство природы.** Заметим прежде всего, что всякое

обобщение до известной степени предполагает веру в единство и простоту природы. Допущение единства не представляет затруднений. Если бы различные части Вселенной не относились между собой как органы одного и того же тела, они не обнаруживали бы взаимодействий – они, так сказать, взаимно игнорировали бы друг друга, и мы, в частности, знали бы только одну из них. Поэтому мы должны задавать вопрос не о том, едина ли природа, а о том, каким образом она едина.

Относительно второго положения дело обстоит сложнее, нельзя быть уверенным, что природа проста. Можем ли мы без опасения считать это допущение справедливым?

Было время, когда простота закона Мариотта служила аргументом в пользу его точности. Сам Френель, сказавший однажды в беседе с Лапласом, что природа не беспокоится об аналитических трудностях, считал себя обязанным дать по этому поводу объяснения, чтобы не встать в слишком резкое противоречие с господствовавшим тогда мнением.

С тех пор взгляды сильно изменились; однако те, которые не верят, что законы природы должны быть просты, все же часто бывают вынуждены поступать так, как если бы они разделяли эту веру. Они не могли бы совершенно отрешиться от этой необходимости, не разрушая тем самым всякой возможности обобщения, а следовательно, и науки.

Ясно, что любой факт может быть обобщен бесконечным множеством способов, из которых надо выбирать, а при вы-

боре можно руководствоваться только соображениями простоты. Возьмем самый обыденный пример – интерполяцию. Между точками, полученными из наблюдений, мы проводим непрерывную, возможно более плавную линию. Отчего мы избегаем угловых точек и слишком резких поворотов? Отчего мы не чертим кривую в виде ряда самых причудливых зигзагов? Оттого, что мы заранее знаем (или считаем, что знаем), что закон, который нужно отобразить, не может быть очень сложным.

Массу Юпитера можно определять или из движений его спутников, или из возмущений больших планет, или из возмущений малых планет. Беря среднюю из величин, полученных по каждому способу, найдем три числа, весьма близкие друг к другу, но все же разные. Можно было бы объяснить этот результат, предположив, что коэффициент притяжения не является одинаковым в этих трех случаях; тогда, конечно, наблюдения были бы воспроизведены гораздо лучше. Почему же мы устраняем такое объяснение? Не потому, что оно было бы нелепо, а потому, что оно страдает бесполезной сложностью. Его примут лишь тогда, когда оно станет обязательным; а пока этого еще нет.

Словом, любой закон обычно считается простым, пока не доказано противоположное. Я только что указал основания, которые внушили физикам это воззрение; но как оправдать его, стоя лицом к лицу с открытиями, каждый день указывающими нам новые детали явлений, все более сложные, все

более обильные? Помимо этого, как примирить его с допущением единства природы? Ибо если все вещи находятся во взаимной зависимости, то отношения, в которых принимает участие такая масса объектов, не могут быть просты.

Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность.

Что может быть сложнее запутанных движений планет и что может быть проще закона Ньютона? Природа, играя (как говорил Френель) аналитическими трудностями, комбинацией простых элементов создает тут какие-то гордые узлы. Вот пример скрытой простоты, которую надо было обнаружить.

Примерам обратных случаев нет числа. В кинетической теории газов рассматриваются быстро движущиеся частицы, траектории которых, вследствие постоянных столкновений, принимают самые причудливые формы; они бороздят пространство по всем направлениям. Доступный наблюдению результат есть простой закон Мариотта, каждый отдельный факт был сложным, но закон больших чисел восстанавливает простоту в средних величинах. Эта простота – кажущаяся; лишь грубость наших чувств мешает нам видеть действительную сложность.

Множество явлений повинуется закону пропорциональ-

ности – почему? Потому что в них встречается какая-нибудь весьма малая величина. Выведенный из наблюдений простой закон является в этом случае лишь применением общего аналитического правила, по которому исчезающе малый прирост функции пропорционален приросту независимой переменной. Так как в действительности наблюдаемые нами приросты не бесконечно малы, а только очень малы, то закон пропорциональности является лишь приближенным и простота – кажущейся. То же самое применимо к правилу суперпозиции малых движений, столь плодотворному по своим применениям и образуящему, между прочим, основу оптики.

А сам закон Ньютона? Простота его, так долго остававшаяся скрытой, быть может, просто кажущаяся. Кто знает, не лежит ли в основании управляемых им явлений некоторый сложный механизм (может быть, соударения тонкой материи, возбужденной беспорядочными движениями), и не есть ли простота этого закона лишь следствие игры средних величин и больших чисел? Во всяком случае, трудно удержаться от мысли, что истинный закон содержит добавочные члены, которые делаются значительными на малых расстояниях. Если в астрономии ими можно пренебрегать сравнительно с основным членом, так что здесь закон Ньютона является во всей своей простоте, то это имеет место лишь вследствие огромности небесных расстояний.

Нет сомнения, что если бы наши методы исследования

становились все более и более проникающими, то мы открывали бы простое под сложным, потом сложное под простым, потом опять простое под сложным и т. д., причем невозможно было бы предвидеть, каково будет последнее звено. Где-нибудь да необходимо остановиться; и чтобы наука была возможна, надо остановиться, когда мы пришли к простоте, Простота – единственная почва, на которой мы можем воздвигнуть здание наших обобщений. Но если эта простота только кажущаяся, то будет ли такая почва достаточно надежной? Это – вопрос, заслуживающий исследования. Итак, рассмотрим, какую роль играет в наших обобщениях уверенность в простоте. Пусть мы установили, что некоторый простой закон подтверждается для достаточно большого числа отдельных случаев; тогда мы отказываемся допустить, что такое удачное совпадение было простой случайностью, и заключаем отсюда, что закон этот должен быть верен вообще.

Кеплер заметил, что все наблюденные Тихо Браге положения одной из планет лежат на одном и том же эллипсе. Ему ни на мгновение не приходит мысль, что благодаря странной игре случая Тихо смотрел на небо как раз в те моменты, когда истинная траектория планеты пересекала этот эллипс.

В таком случае не все ли равно, реальна ли простота или за ней скрывается сложная истина. Пусть простота будет следствием влияния больших чисел, которое сглаживает индивидуальные различия, или пусть она зависит от малости некоторых величин, позволяющей пренебрегать некоторыми

членами, – как бы то ни было, она не случайна. Реальна ли эта простота или призрачна – она всегда имеет причину. Мы можем рассуждать таким образом всегда, и если простой закон был подтвержден большим числом отдельных наблюдений, то у нас есть законное право предположить, что он и впрямь будет верен в аналогичных случаях. Отказаться от этого – значило бы для нас приписать случайности недопустимую роль.

Однако имеется одно отличие. Простота реальная, глубоко коренящаяся, устояла бы перед увеличением точности наших измерительных средств. Если бы мы считали природу простою в основе, мы должны были бы сделать заключение от простоты приближенной к простоте строгой. Так прежде и поступали; но мы больше не имеем на это права.

Так, например, простота законов Кеплера – только кажущаяся. Это обстоятельство не мешает нам со значительным приближением прилагать эти законы ко всем системам, подобным Солнечной системе, но оно препятствует им быть строго точными.

**Роль гипотезы.** Всякое обобщение есть гипотеза. Поэтому гипотезе принадлежит необходимая, никем никогда не оспаривавшаяся роль. Она должна лишь как можно скорее подвергнуться и как можно чаще подвергаться проверке.

Если она этого испытания не выдерживает, то, само собой разумеется, ее следует отбросить без всяких сожалений. Так вообще и делают; но иногда не без некоторой досады. Но

это чувство ничем не оправдано; напротив, физик, который пришел к отказу от одной из своих гипотез; должен был бы радоваться, потому что тем самым он нашел неожиданную возможность открытия. Я предполагаю, что его гипотеза не была выдвинута необдуманно, что она принимала в расчет все известные факторы, могущие помочь раскрыть явление! Если она не оправдывается, то это свидетельствует о чем-то неожиданном, необыкновенном; это значит, что предстоит найти нечто неизвестное, новое.

И была ли опровергнутая таким образом гипотеза бесплодной? Нисколько! Она, можно сказать, принесла больше пользы, чем иная верная гипотеза: не только потому, что она вызвала решающий опыт, но и потому, что, не будь ее, этот опыт был бы произведен наудачу, и в нем не увидели бы ничего чрезвычайного; только в списке фактов прибавился бы один лишний, не влекущий за собой никаких следствий.

Теперь выясним, при каком условии пользование гипотезой не представляет опасности? Одного твердого намерения руководиться опытом еще недостаточно; этим еще не исключается возможность влияния опасных гипотез; такими в особенности являются те, которые вводятся неосознанно, принимаются молчаливо, почему мы и не можем от них избавиться. Здесь-то и обнаруживается еще одна услуга, которую нам может оказать математическая физика. По свойственной ей точности она вынуждает нас формулировать все гипотезы, которые мы иначе могли бы допустить, сами не по-

дозревая этого.

Заметим, с другой стороны, что весьма важно не множить гипотез чрезмерно и вводить их только одну после другой. Если мы создали теорию, основанную на множестве гипотез, и если опыт осуждает ее, то как найти между нашими предпосылками ту, которая должна быть изменена? Открыть ее было бы невозможно. И наоборот, если опыт согласуется с теорией, то можно ли считать, что подтверждены сразу все гипотезы? Можно ли надеяться из одного уравнения определить несколько неизвестных?

Равным образом нужно тщательно отличать различные виды гипотез. В числе их бывают, прежде всего, такие, которые вполне естественны и которых почти невозможно избежать; так, например, трудно не предположить, что влияние очень удаленных тел ничтожно, что малые движения подчинены линейной зависимости, что действие является непрерывной функцией причины. То же я скажу об условиях, вытекающих из понятия симметрии. Все эти гипотезы, так сказать, образуют общий фонд всех теорий математической физики. Если бы их пришлось оставить, то это уже после всех других.

Гипотезы второй категории я назову безразличными. В большинстве вопросов исследователь в самом начале своих вычислений предполагает, либо что материя непрерывна, либо, наоборот, что она состоит из атомов. Он мог бы изменить свое предположение на обратное, не меняя этих

выводов; лишь получение их стало бы более трудным. Если теперь опыт подтверждает его заключения, станет ли он думать, что ему удалось доказать, например, реальность атомов?

В оптических теориях вводятся два вектора, из которых один рассматривается как скорость поступательного движения, другой – как вихрь (*tourbillon*). Это – пример безразличной гипотезы, так как те же самые выводы получаются и при обратном предположении; поэтому здесь согласие с опытом не может доказать, что действительно первый вектор есть поступательная скорость; оно подтверждает лишь, что величина, о которой идет речь, есть действительно вектор, – а это и есть единственная гипотеза, фактически введенная в число предпосылок. Мы рассматриваем этот вектор либо как скорость, либо как вихрь просто потому, что ограниченность нашего ума вынуждает нас облекать наши представления в некоторую конкретную форму. Пусть нам необходимо обозначить этот вектор буквой  $x$  или же  $y$ ; подобно тому как результат опыта, каков бы он ни был, не дает оснований к тому, чтобы рассматривать вектор как скорость, он не может быть истолкован в том смысле, что его надо обозначать через  $x$ , а не через  $y$ .

Этого рода безразличные гипотезы никогда не представляют опасности, лишь бы только природа их была ясно понимаема. Они могут быть полезными то в качестве вычислительного приема, то как некоторая конкретная опора для

нашей мыслительной способности. Поэтому нет оснований их осуждать.

Гипотезы третьей категории являются обобщениями в настоящем смысле слова. Дело опыта – подтвердить их или опровергнуть. Как в том, так и в другом случае они являются плодотворными; но, по изложенным мною основаниям, это имеет место лишь при условии ограниченности их числа.

**Происхождение математической физики.** Пойдем дальше, займемся более пристальным рассмотрением обстоятельств, обусловивших развитие математической физики. Прежде всего мы обнаруживаем, что усилия ученых всегда были направлены к тому, чтобы разложить сложное явление, данное непосредственно в опыте, на весьма большое число элементарных явлений.

Это осуществляется тремя различными способами. Сначала о разложении во времени: вместо того чтобы охватывать последовательное развитие явления в его целостности, стараются установить связь каждого момента с моментом, непосредственно предшествующим. Так, например, допускают, что нынешнее состояние мира полностью обусловливается его ближайшим прошлым, что на него, если можно так выразиться, прямо не влияет воспоминание об отдаленном прошлом. Благодаря этому постулату вместо непосредственного изучения всей последовательности явлений можно ограничиться составлением их «дифференциального уравнения», на место законов Кеплера становится закон

Ньютона.

Далее стремятся расчленить явление по отношению к пространству. Опыт дает нам запутанную совокупность фактов, происходящих в пространстве некоторого объема. Надо постараться распознать в ней элементарное явление, которое, напротив, было бы локализовано в пределах весьма малой части пространства.

Несколько примеров, быть может, помогут лучше понять мою мысль. Никогда не достиг бы цели тот, кто захотел бы прямо изучить сложное распределение температур в охлаждающемся теле. Но все упрощается, если принять во внимание, что ни одна точка тела не может непосредственно передавать теплоту удаленной точке; теплота будет передаваться лишь точкам, лежащим в непосредственном соседстве; лишь постепенно тепловой поток достигнет других точек тела. Здесь элементарным явлением служит обмен теплоты между двумя смежными точками; этот процесс заключен в тесные пространственные пределы и является относительно простым, если ввести естественное допущение, что на него не влияет температура частиц, лежащих на заметном расстоянии.

Другой пример. Я сгибаю стержень; он принимает весьма сложную форму, прямое изучение которой было бы невозможно; я смогу приступить к ее исследованию, если замечу, что сгибание стержня является результатом деформации весьма малых элементов стержня и что деформация каждо-

го из них зависит исключительно от сил, непосредственно к нему приложенных, а не от сил, действующих на другие элементы.

В этих примерах, которые можно было бы множить без труда, заключено допущение, что не существует действия на расстоянии (по крайней мере на значительном расстоянии). Это – гипотеза; она не всегда является верной – примером служит закон тяготения; поэтому ее надлежит подвергнуть проверке; если она подтверждается хотя бы приближенно, то она ценна, потому что она позволит нам обосновать математическую физику по крайней мере путем последовательных приближений.

Если такая гипотеза не выдерживает проверки, следует искать что-либо аналогичное, ибо есть и другие средства дойти до элементарных явлений. Если несколько тел действуют вместе, то возможно, что их действия независимы и просто складываются друг с другом либо как векторы, либо как скалярные величины. В таком случае элементарным явлением будет действие отдельного тела. В иных случаях задачу сводят к малым движениям, или – более общо – к малым вариациям, которые подчинены известному закону суперпозиции. Наблюдаемое движение разложится тогда на простые движения, например звук – на гармонические тоны, белый свет – на монохроматические составляющие.

Какими же средствами можно уловить элементарное явление, после того как выяснилось, с какой стороны следует

его искать?

Прежде всего, часто случается, что, для того чтобы его угадать или – лучше – чтобы угадать то, что есть в нем полезного для нас, вовсе нет необходимости проникать в самый механизм его; достаточно будет применить закон больших чисел. Обратимся опять к примеру распространения теплоты: каждая частица излучает по направлению к каждой соседней частице, но по какому закону – этого нам нет необходимости знать; всякое предположение относительно этого было бы гипотезой безразличной, а следовательно, бесполезной и не поддающейся проверке. В самом деле, благодаря свойствам средних величин и вследствие симметричности среды все различия сглаживаются и результат оказывается всегда одним и тем же, какая бы гипотеза ни была предложена.

Подобное имеет место в теории упругости и в теории капиллярных явлений: близкие друг к другу молекулы притягиваются и отталкиваются, но нам нет нужды знать, по какому закону. Достаточно того, что это притяжение действует только на малых расстояниях, что число частиц весьма велико, что среда симметрична, а далее остается лишь пустить в ход закон больших чисел.

В приведенных примерах простота элементарного явления таилась под сложностью непосредственно наблюдаемого результата; но эта простота в свою очередь является причиной и скрывает за собою весьма сложный механизм.

Лучшим средством дойти до элементарного явления был бы, очевидно, опыт. С помощью искусных экспериментальных приемов нужно было бы разъединить ту сложную связанность, какую природа предоставляет нашему исследованию, а затем тщательно изучать найденные и доведенные до возможной степени чистоты составные элементы. Примером может служить разложение естественного белого луча призмой на монохроматические лучи и поляризатором – на поляризованные лучи.

К несчастью, это не всегда возможно и достаточно. Иногда необходимо, чтобы умозрение предшествовало опыту. Я ограничусь одним примером, который всегда поражал меня: разлагая белый свет, я могу выделить узкую полосу спектра, но, как бы мала она ни была, она будет иметь известную ширину. Точно так же естественные монохроматические источники света дают нам линию тонкую, но не до бесконечности. Кто-нибудь мог бы предположить, что, подвергая экспериментальному изучению эти естественные источники, употребляя все более и более тонкие спектральные линии и в конце концов переходя, так сказать, к пределу, удалось бы достигнуть знания свойств строго монохроматического света. Но это было бы неточно. Пусть мы имеем два луча, испускаемые одним и тем же источником; пусть мы сначала поляризуем их во взаимно перпендикулярных плоскостях, затем приведем к одной плоскости поляризации и, наконец, заставим интерферировать. Интерференция произошла бы, если

бы свет был строго монохроматичен; но при наших лишь приближенно монохроматических источниках интерференция не произойдет, как бы узка ни была взятая спектральная линия; чтобы явление имело место, она должна была бы быть во много миллионов раз уже, чем самые тонкие известные нам линии.

Таким образом, в этом случае переход к пределу обманул бы нас; здесь теоретическая мысль должна была идти впереди опыта, и если она успела в этом, то лишь потому, что инстинктивно руководилась соображением простоты.

Знание элементарного факта позволяет нам сформулировать задачу в виде уравнения; отсюда путем некоторых комбинаций остается только вывести заключение о сложном факте, подлежащем наблюдению и проверке. Это – не что иное, как интегрирование, которое уже составляет дело математика.

Можно задать вопрос: почему в физических науках обобщение так охотно принимает математическую форму? Причина этого теперь понятна: она состоит не только в том, что приходится выражать числовые законы, но и в том, что наблюдаемое явление есть результат суперпозиции большого числа элементарных явлений, подобных друг другу: значит, здесь вполне естественно появиться дифференциальным уравнениям.

Однако недостаточно, чтобы каждое элементарное явление подчинялось простым законам; все подлежащие сочета-

нию явления должны подчиняться одному и тому же закону. Только в этом случае математика может принести пользу, потому что она научит нас сочетать подобное с подобным. Цель ее – предсказывать результат сочетания, не проделывая его шаг за шагом на самом деле. Когда приходится повторять несколько раз одну и ту же операцию, математика позволяет нам избежать этого повторения и путем особого рода индукций заранее узнать нужный результат. Я изложил этот прием выше, в главе о математическом умозаключении. Однако для этого необходимо, чтобы все эти операции были подобны друг другу; в противном случае, очевидно, пришлось бы на деле выполнить их одну за другой и помощь математики оказалась бы ненужной.

Таким образом, возможность рождения математической физики обусловлена приблизительной однородностью изучаемого предмета. Это условие не выполняется в биологических науках: здесь мы не находим ни однородности, ни относительной независимости разнородных частей, ни простоты элементарного явления. Вот почему биологи вынуждены прибегать к иным приемам обобщения.

# Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.