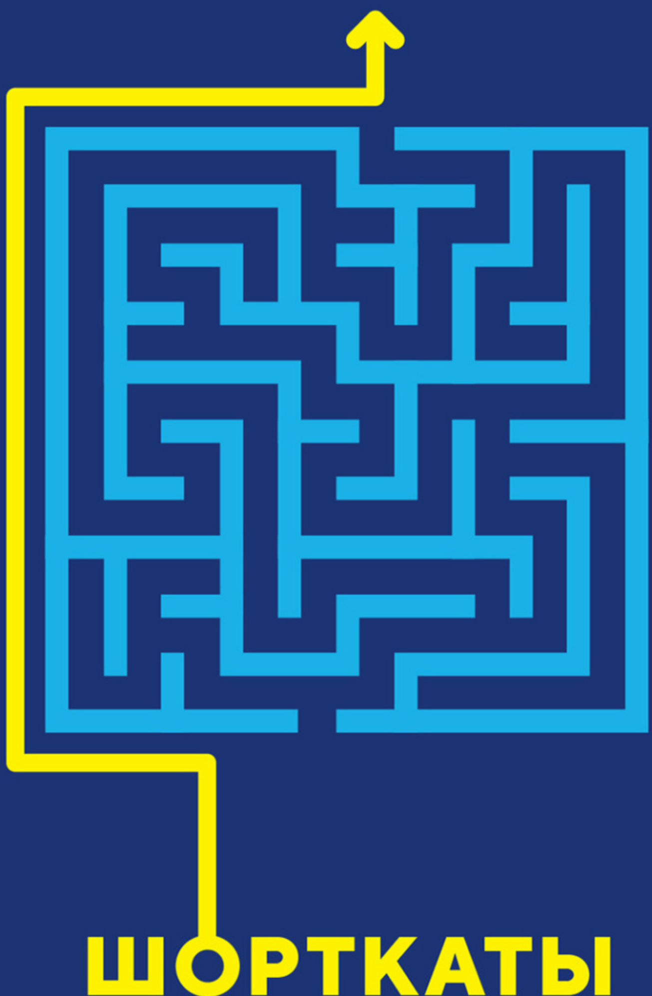
ИСКУССТВО МЫСЛИТЬ РАЦИОНАЛЬНО



ШОРТКАТЫ В МАТЕМАТИКЕ И В ЖИЗНИ

МАРКУС ДЮ СОТОЙ

Маркус дю Сотой

Искусство мыслить рационально. Шорткаты в математике и в жизни

«Азбука-Аттикус»

2021

УДК 51-7
ББК 22.1

дю Сотой М.

Искусство мыслить рационально. Шорткаты в математике и в жизни / М. дю Сотой — «Азбука-Аттикус», 2021

ISBN 978-5-389-21362-3

Принято считать, что залог успеха – упорный труд. Но подлинный успех приносит вовсе не он – его приносят шорткаты: более короткие и вместе с тем более легкие, более быстрые и более удобные пути решения той или иной задачи. Благодаря таким рациональным путям мы добиваемся выдающихся результатов. А по словам одного из величайших в мире математиков Маркуса дю Сотоя, математика – самое настоящее искусство шортката и лучшее средство экономии времени. Каждый из нас может сделать свою жизнь комфортнее при помощи нескольких шорткатов. «У вас есть выбор. Есть очевидный маршрут, долгий и утомительный, на котором ничего красивого по пути не увидишь. Путешествие по нему займет массу времени и оставит вас совершенно без сил, но рано или поздно вы всетаки доберетесь до места назначения. Но есть и другая дорога. Найти, где она ответвляется от основного пути, совсем не просто – причем кажется, что она уводит вас прочь от цели, а не приближает к ней. Но затем вы замечаете указатель с надписью “шорткат”. Он обещает быстрый переход по пересеченной местности, который позволит вам добраться до цели за меньшее время и с минимальными затратами усилий. Выбор за вами. Эта книга направляет вас по второму пути. Это ваш шорткат к лучшему мышлению, которое понадобится вам, чтобы пройти по этому нестандартному маршруту и попасть именно туда, куда вам хочется». (Маркус дю Сотой) В формате PDF A4 сохранён издательский дизайн.

УДК 51-7
ББК 22.1

ISBN 978-5-389-21362-3

Содержание

Маркус дю Сотой
Искусство мыслить рационально. Шорткаты в математике и в жизни

Посвящается всем учителям математики, но в особенности мистеру Бейлсону, который показал мне мой первый математический шорткат

Marcus du Sautoy
THINKING BETTER
The Art of the Shortcut

Научный редактор А.В. Галактионов, к. ф.-м. н.

* * *

Упоительное путешествие по множеству разнообразных ситуаций, в которых математическое мышление – и в особенности поиск рациональных шорткатов – проливает свет на самые глубокие математические истины. Более того, оказывается, что эти шорткаты могут быть невероятно полезны и для всех нас!
Дэвид Шварц, автор биографии Энрико Ферми

Дю Сотой – талантливый и неутомимый популяризатор математики, обладающий обширными познаниями… Это сборник «величайших хитов» среди математических идей, о которых он рассказывает в своем фирменном стиле, доступно и энергично.
Тим Харфорд, The Financial Times

Маркус дю Сотой искусно проводит читателя сквозь сложные математические рассуждения и постоянно подчеркивает важность решения задач. Любящий математику читатель найдет в этой книге обильную пищу для размышлений.
Publishers Weekly

Эта книга о шорткатах не пользуется шорткатами. Она полна заставляющих задуматься примеров из разных областей, от математики до социологии.
Мелисса Франклин, профессор кафедры физики им. Маллинкродта, Гарвардский университет

Отправление

У вас есть выбор. Есть очевидный маршрут, долгий и утомительный, на котором ничего красивого по пути не увидишь. Путешествие по нему займет массу времени и оставит вас совершенно без сил, но рано или поздно вы все-таки доберетесь до места назначения. Но есть и другая дорога. Найти, где она ответвляется от основного пути, совсем не просто – причем кажется, что она уводит вас прочь от цели, а не приближает к ней. Но затем вы замечаете указатель с надписью «шорткат»[1]. Он обещает быстрый переход по пересеченной местности, который позволит вам добраться до цели за меньшее время и с минимальными затратами усилий. Возможно, по пути даже встретятся захватывающие виды. Однако, чтобы не сбиться с этого пути, вам придется все время быть настороже. Выбор за вами. Эта книга направляет вас по второму пути. Это ваш шорткат к лучшему мышлению, которое понадобится вам, чтобы пройти по этому нестандартному маршруту и попасть именно туда, куда вам хочется.

Именно шорткаты заманили меня в математику. Будучи довольно ленивым подростком, я всегда старался добраться до цели самым рациональным путем. Не то чтобы я пытался жульничать. Мне просто хотелось получать результат, затрачивая как можно меньше сил. Поэтому, когда мой учитель математики рассказал мне, двенадцатилетнему, что в том предмете, который мы изучаем в школе, больше всего ценятся именно такие шорткаты, это меня чрезвычайно заинтересовало. Все началось с простой истории о девятилетнем мальчике по имени Карл Фридрих Гаусс. Рассказ учителя перенес нас в 1786 год, в класс этого мальчика в школе расположенного недалеко от Ганновера города Брауншвейга, в котором рос юный Гаусс. Город был невелик, и в местной школе был всего один учитель, герр Бюттнер, которому нужно было каким-то образом учить сотню городских детей в одной-единственной классной комнате.

Мой собственный учитель, довольно угрюмый шотландец мистер Бейлсон, был сторонником строгой дисциплины, но по сравнению с герром Бюттнером даже он казался добряком. Учитель Гаусса прохаживался между рядами парт, размахивая хлыстом, которым он и поддерживал дисциплину в непослушном классе. Сама классная комната, которую я впоследствии посетил, совершая своего рода математическое паломничество, была мрачным помещением с низким потолком, плохим освещением и неровным полом. Мне она показалась похожей на средневековую тюрьму, и режим Бюттнера, по-видимому, вполне гармонировал с ее обстановкой.

Так вот, рассказывают, что однажды на уроке арифметики Бюттнер решил задать своим ученикам какую-нибудь трудоемкую задачу, которая надолго заняла бы их, чтобы сам он смог немного вздремнуть. «Класс… я хочу, чтобы вы сложили на своих досках все числа от 1 до 100, – сказал Бюттнер. – Когда закончите, сдайте доски мне».

Не успел учитель закончить это предложение, как Гаусс уже вскочил на ноги и положил ему на стол свою аспидную доску, объявив по-нижненемецки: «Ligget se» – «Готово». Бюттнер взглянул на мальчика, пораженный его дерзостью. Его рука уже было сжала хлыст, но он все же решил подождать, пока остальные ученики тоже сдадут свои работы, а уж потом заняться воспитанием юного Гаусса. В конце концов весь класс закончил решать задачу, и на столе Бюттнера образовалась гора аспидных досок, покрытых записанными мелом вычислениями. Учитель начал проверять работы, начав с доски, лежавшей на самом верху. Ответы большинства

---

[1] Английское слово *shortcut*, центральное в этой книге, не имеет точного аналога в русском языке. Его часто переводят выражением «короткий путь», но оно не вполне передает нужное значение. Такой путь далеко не всегда бывает физически более коротким: он может быть более быстрым, более легким, более удобным и т. д. Поэтому кажется целесообразным использовать в переводе этой книги слово «шорткат», уже существующее (особенно в контексте информатики), хотя еще и не вполне закрепившееся, в русском языке. – *Здесь и далее, если не указано иное, примеч. перев.*

были неверными: где-нибудь в процессе вычислений ученики допускали те или иные арифметические ошибки.

В конце концов Бюттнер добрался и до доски Гаусса. Он заранее готовился распечь юного выскочку, но, взяв его доску, увидел на ней правильный ответ – 5050. Никаких вычислений на доске не было. Бюттнер был поражен. Как мальчику удалось так быстро найти ответ?

Утверждается, что не по годам развитый ученик обнаружил шорткат, который позволил ему не заниматься трудоемкими и объемными арифметическими расчетами. Он понял, что при сложении чисел по парам:

$$1 + 100$$
$$2 + 99$$
$$3 + 98$$
$$\ldots$$

каждая такая сумма оказывается равной 101. А общее число пар – 50. Следовательно, решение задачи сводится к

$$50 \times 101 = 5050.$$

Я помню, как взбудоражила меня эта история. Идея Гаусса, которая помогла ему найти шорткат, избавляющий от ужасно нудной и трудоемкой работы, была для меня настоящим откровением.

Хотя в этом рассказе о школьных годах Гаусса, вероятно, больше легенды, чем правды, он тем не менее изящно описывает одно важное обстоятельство: суть математики – не в громоздких вычислениях, как кажется столь многим, а в стратегическом мышлении[2].

– Это, дорогие мои ученики, и есть математика, – провозгласил мой учитель. – Искусство шортката!

«Ага! – подумал я, двенадцатилетний. – А ну-ка поподробнее!»

[2] Историческая достоверность этого эпизода небесспорна: в точности то же самое рассказывают, например, о Лобачевском и о Спинозе. Это, однако, нисколько не умаляет ни гениальности всех этих мыслителей, ни изящества решения.

Дальше, больше, быстрее

Люди все время пользуются шорткатами. Ничего другого нам не остается. Нам нужно принимать решения за короткое время. Нам нужно решать сложные задачи, используя ограниченные умственные способности. Одной из первых стратегий, которые мы разработали для преодоления сложных препятствий, была идея эвристики – процесса, в котором мы упрощаем задачи, игнорируя, сознательно или бессознательно, часть информации, поступающей в мозг.

Проблема заключается в том, что эвристические методы, к которым прибегают люди, по большей части приводят к неверным суждениям и предвзятым решениям и, как правило, не подходят к тем целям, для которых их применяют. Зная что-либо из собственного опыта, мы склонны экстраполировать это знание на любые другие задачи, сравнивая их с тем, что нам уже известно. Мы судим о глобальном, опираясь на свое знание локального. Пока наш мир не слишком далеко выходил за пределы небольшого участка саванны, на котором мы жили, в этом не было ничего страшного. Но по мере расширения области нашего обитания эти эвристические методы перестали давать нам правильное понимание того, как устроены вещи, выходящие за пределы наших локальных знаний. Начиная с этого момента мы стали разрабатывать все более действенные шорткаты. Эти приспособления и образуют то, что мы называем сегодня математикой.

Чтобы обнаружить удобный шорткат, нужно подняться над тем ландшафтом, который собираешься пересечь. Когда находишься внутри ландшафта, часто приходится ориентироваться лишь по тому, что видишь вокруг себя. Хотя направление каждого следующего шага кажется правильным, получающийся в результате маршрут может вести к цели длинным окольным путем, а то и вовсе уводить совершенно в другую сторону. Поэтому люди разработали лучшие методы мышления – способность абстрагироваться от мелких подробностей решаемой задачи и понимать, что где-то может существовать неожиданный путь, который приведет к цели эффективнее и быстрее.

Именно так поступил с задачей, которую задал классу учитель, Гаусс. Пока другие ученики корпели, складывая числа, прибавляя каждый раз по одному следующему числу, Гаусс обозрел задачу целиком и придумал, как можно с выгодой для себя использовать начало и конец процесса ее решения.

В математике чрезвычайно важна способность применять мышление высокого уровня, позволяющее увидеть структуру там, где на первый взгляд видны лишь случайные извивающиеся тропки. Подняться над ландшафтом и оглядеть его с большой высоты, чтобы понять истинное положение вещей. Создание такой карты задачи и приводит к возникновению шорткатов. А когда мы получили способность видеть мысленным взором структуры, с которыми мы не встречались в физическом мире, эта способность к абстрактному мышлению стала залогом поразительных достижений человеческой цивилизации на протяжении многих веков.

Путь к лучшему мышлению начался 5000 лет назад на берегах Нила и Евфрата. Люди хотели найти более совершенные способы строительства городов-государств близ этих рек. Сколько каменных блоков потребуется для возведения пирамиды? Какого размера участок земли нужно отвести под злаки, чтобы прокормить город? Какие изменения высоты воды в реке говорят о приближающемся наводнении? В этих зарождающихся обществах возвышались те, у кого были средства, позволяющие находить шорткаты к решению таких задач. Успехи математики в качестве шортката к быстрому развитию первых цивилизаций превратили эту дисциплину в мощное орудие тех, кто желал добиться большего, причем как можно быстрее.

Новые математические открытия снова и снова приводили к радикальным изменениям цивилизации. Взрывное развитие математики в эпоху Возрождения и после нее, давшее нам, в частности, математический анализ, открыло перед учеными поразительные шорткаты к рациональным инженерным решениям. Сегодня математика лежит в основе всех алгоритмов, которые работают в наших компьютерах, помогая нам не заблудиться в цифровых джунглях, – в буквальном смысле прокладывая шорткаты к нашим целям, от веб-сайтов, лучше всего соответствующих тому, что мы ищем в интернете, до лучших партнеров для путешествия длиной в жизнь.

Однако интересно отметить, что первым научился использовать возможности математики для выработки лучших способов преодоления препятствий вовсе не человек. Задолго до нашего появления природа уже оперировала математическими шорткатами к решению задач. Многие из законов физики основаны на том принципе, что природа всегда находит кратчайшие пути. Свет распространяется по траектории, обеспечивающей самое быстрое достижение цели, даже если для этого ей приходится изгибаться вокруг крупных объектов – например, Солнца. Мыльная пленка образует формы, требующие наименьших затрат энергии: мыльные пузыри получаются сферическими, потому что эта симметричная форма имеет наименьшую площадь поверхности[3] и, следовательно, наиболее выгодна энергетически. Пчелы строят шестиугольные соты, потому что на постройку шестиугольника, охватывающего заданную площадь, уходит меньше всего воска. Наши тела нашли способ ходьбы, позволяющий переместиться из пункта А в пункт Б с наименьшими энергетическими затратами.

Природа ленива, как и человек, и стремится находить низкоэнергетические решения. Как писал живший в XVIII веке математик Пьер Луи де Мопертюи, «природа экономна во всех своих действиях». Она чрезвычайно хорошо умеет вынюхивать шорткаты. У каждого такого решения неизменно есть математическое объяснение. И шорткаты, найденные человеком, часто материализуются в результате наших исследований решений, которые нашла природа.

[3] При заданном объеме.

Предстоящее путешествие

В этой книге я хочу поделиться с вами тем арсеналом шорткатов, который математики, подобные Карлу Фридриху Гауссу, разрабатывали на протяжении многих столетий. В каждой главе речь пойдет о том или ином шорткате особого, отличного от других вида. Но все они предназначены для одного: превратить вас из того, кто корпит над решением задачи, в того, кто может сдать свою аспидную доску с ответом раньше всех остальных.

Нашим спутником в этом путешествии я выбрал Гаусса. С его успеха на уроке началась карьера, которая, на мой взгляд, сделала его достойным звания принца шорткатов. Более того, множество революционных открытий, которые он совершил в течение своей жизни, связаны и с многими из разных шорткатов, о которых я буду говорить в этой книге.

Я надеюсь, что изложенные здесь истории о шорткатах, накопленных математиками за долгие годы, составят инструментарий, который пригодится всем тем, кто захочет сэкономить время, уходящее на одно занятие, чтобы можно было уделить больше времени чему-то другому, более интересному. Очень часто эти шорткаты оказываются применимы и к задачам, на первый взгляд не имеющим ничего общего с математикой. Однако математика – это образ мышления, позволяющий разбираться в сложном мире и находить пути с одного берега на другой.

Поэтому математика вполне заслуженно занимает центральное место в образовательной программе. Не потому, что всем и каждому абсолютно необходимо решать квадратные уравнения. По правде говоря, кому они нужны! Важный навык, используемый в решении такой задачи, – это понимание могущества алгебры и алгоритмов.

Я начну это путешествие к лучшему мышлению с одного из самых важных шорткатов, разработанных математиками, – паттернов[4]. Паттерн часто бывает лучшим из всех шорткатов. Увидев паттерн, можно найти шорткат, позволяющий экстраполировать данные в будущее. Такая способность выявлять фундаментальные правила образует основу математического моделирования.

Роль шортката очень часто состоит в понимании основополагающего принципа, объединяющего кажущиеся несвязанными друг с другом задачи. Прелесть шортката Гаусса в том, что даже если учитель решит усложнить задание и предложит сложить числа до тысячи или до миллиона, шорткат по-прежнему будет работать. Последовательное сложение чисел будет занимать все больше времени, но на прием Гаусса это никак не повлияет: чтобы сложить числа от единицы до миллиона, нужно просто по-прежнему разбить их на пары и получить 500 000 пар, сумма членов каждой из которых равна 1 000 001. Перемножим эти два числа, и – бинго! – ответ готов. Представьте себе туннель, образующий короткий путь сквозь гору: если даже гора каким-то образом станет выше, на дороге это никак не отразится.

Способность создавать и изменять язык тоже оказывается очень эффективным шорткатом. Алгебра помогает нам распознавать фундаментальные принципы, лежащие в основе широкого спектра совершенно не похожих друг на друга задач. Язык координат позволяет выразить геометрию в числах и часто выявляет шорткаты, которых не видно на геометрических чертежах. Создание языка может быть поразительным средством понимания. Я помню, как боролся с необычайно сложной системой, описание которой требовало огромного множества условий. Откровением стал для меня совет научного руководителя: «Дайте ей название». Это позволило мне создать шорткат для размышлений.

[4] Еще одно богатое значениями английское слово, которое, кажется, лучше позаимствовать, чем передавать многословными выражениями. В зависимости от контекста оно может означать рисунок, узор, канву, выкройку, шаблон, систему, характер, закономерность и т. д. Трудность перевода слова *pattern* на другие языки обсуждается и в главе 3 этой книги.

Каждый раз, когда я заговариваю об идее шорткаты, мои собеседники неизменно считают, что речь идет о каком-то жульничестве. Что я пытаюсь срезать какие-то углы. Поэтому очень важно с самого начала научиться отличать шорткаты от срезания углов. Я ищу более рациональный путь к правильному решению. Меня не интересуют всякие некачественные приблизительные ответы. Я хочу добиться полного понимания, но избежать ненужной тяжелой работы.

При этом некоторые шорткаты сводятся к приближениям, достаточно точным для решения насущных задач. В некотором смысле сам язык – это тоже шорткат. Например, слово «стул» – шорткат к целой группе разного рода вещей, на которых можно сидеть. Но придумывать по отдельному слову для каждого конкретного стула было бы нерационально. Язык – это очень хитрое низкоразмерное представление окружающего нас мира, которое позволяет нам эффективно общаться друг с другом и облегчает наше существование в многогранном мире. Не будь у нас шорткатов – слов, каждое из которых обозначает множество предметов, – мы тонули бы в шуме.

Дальше я покажу, что и в математике для обнаружения шортката часто бывает важно отбрасывать информацию. Скажем, топология – это геометрия без размеров. Если вы находитесь в лондонском метро, карта, показывающая, как соединяются между собой разные станции, будет для вас полезнее, чем карта, точно отражающая их географическое расположение. Очень полезными шорткатами бывают и диаграммы. Опять же, лучшие из них отбрасывают все то, что не имеет прямого отношения к решаемой задаче. Но, как я покажу на примерах, грань между хорошим шорткатом и опасностью скатиться к срезанию углов часто бывает очень тонкой.

Одним из величайших средств для поиска шорткатов, изобретенных человечеством, является математический анализ[5]. Многие инженеры используют этот элемент математической магии для нахождения оптимальных решений инженерных задач. Теория вероятностей и статистика – это шорткаты к получению большого количества информации об огромных наборах данных. Математика часто помогает найти самый рациональный путь через сложные геометрические построения или запутанные сети. Когда я влюбился в математику, одним из самых потрясающих откровений для меня стала ее способность находить шорткаты даже к пониманию бесконечного. Шорткаты, соединяющие противоположные концы бесконечного маршрута.

Каждая глава этой книги начинается не с эпиграфа, а с головоломки. Эти головоломки часто можно решить разными способами – проделав долгую и нудную работу или с помощью шортката, если у вас получится его найти. Для каждой из них существует решение, использующее шорткаты, о которых говорится в соответствующей главе. С этими задачами имеет смысл повозиться, прежде чем читать о шорткатах: часто бывает так, что чем больше времени и сил вы потратите на получение окончательного результата, тем лучше вы сможете оценить по достоинству шорткат, когда вам наконец о нем расскажут.

В ходе моих собственных исследований я обнаружил также, что шорткаты бывают разными. Поэтому для путешествия, в которое вы собираетесь отправиться, существует несколько разных маршрутов, и важно найти такой шорткат, который позволит вам быстрее добраться до цели. Есть шорткаты, уже существующие в ландшафте и только и ждущие, чтобы ими воспользовались. Вам, возможно, понадобится лишь указатель, который направит вас в нужную сторону, или карта, которая покажет вам маршрут. Но бывают и такие шорткаты, которые появляются только после того, как вы их проложите, проделав тяжелую работу: на прокладку таких туннелей уходят многие годы, но, когда они уже прокопаны, все остальные могут продвигаться по ним вслед за вами. Некоторые шорткаты и вовсе уводят за пределы того пространства, в котором вы находитесь, – это кротовые норы, ведущие с одного края Вселенной на другой. В

[5] Дифференциальное и интегральное исчисление.

таких случаях появляется дополнительное измерение, показывающее, что два предмета находятся значительно ближе друг к другу, чем вам казалось, – если только вы сумеете выйти за границы привычного мира. Одни шорткаты ускоряют работу, другие уменьшают расстояние, которое нужно пройти, или количество сил, которые необходимо затратить. В каком-нибудь аспекте получается экономия, оправдывающая время, затраченное на поиски шортката.

Но, кроме этого, я понял, что бывают и случаи, когда шорткат оказывается нецелесообразным. Может быть, вы не хотите спешить. Может быть, процесс важнее результата. Может быть, вы хотите потратить побольше энергии, чтобы сбросить вес. Почему мы гуляем целыми днями на природе, если можно вернуться домой коротким путем, лишив себя этого удовольствия? Зачем мы читаем романы, если можно просмотреть их краткое содержание в Википедии? Но даже в этих случаях полезно знать, что есть шорткат, которым можно воспользоваться, – даже если вы решите этого не делать.

В какой-то степени шорткат касается наших отношений с временем. На что вы хотите потратить свое время? Иногда бывает важно уделить время на получение неких ощущений, и в шорткате, лишающем нас этого процесса, нет большого смысла. Нельзя прослушать музыкальное произведение в сокращенном виде. Но в других ситуациях жизнь бывает слишком коротка, чтобы тратить время на достижение цели. Кинофильм может уместить в полутора часах целую жизнь. Вам ни к чему видеть все до единого действия персонажа, за которым вы следите. Перелет на другой конец света – это шорткат по сравнению с пешим переходом в ту же точку; он позволяет вам быстрее начать отпуск. Если бы полет можно было сократить еще сильнее, большинство пошло бы и на это. Но бывают случаи, в которых мы хотим добираться до места назначения медленно. Паломничество не терпит шорткатов. Я никогда не смотрю трейлеры к фильмам – они слишком сокращают фильмы. И тем не менее возможность выбора все равно ценна.

В литературе шорткаты неизменно ведут к беде. Красная Шапочка так и не встретилась бы с волком, если бы шла по тропинке, а не пыталась найти шорткат через лес. В «Путешествии пилигрима в небесную страну» Джона Буньяна те, кто выбирает шорткат в обход гор Затруднения, сбиваются с дороги и гибнут. Во «Властелине колец» Пиппин предостерегает, что «коротким путем всегда получается дольше», хотя Фродо и возражает, что остановки в трактирах задерживают еще сильнее[6]. После катастрофической попытки воспользоваться шорткатом по пути в парк развлечений Гомер Симпсон клянется «больше никогда не вспоминать об этом коротком пути»[7]. Об опасностях, которые неизбежно таят в себе шорткаты, хорошо сказано в фильме 2000 года «Дорожное приключение»: «Конечно, тут трудно, это же короткий путь. Если бы было легко, это был бы “просто путь”». Цель этой книги – освободить идею шортката от оков этих литературных клише. Шорткат – это путь не к беде, а к свободе.

[6] Этот разговор происходит в начале 4-й главы 1-й книги трилогии.

[7] The Simpsons, S06E04, Itchy & Scratchy Land (1994).

Человек и машина

Одним из факторов, породивших во мне желание написать эту книгу во славу шорткатов, было постоянно усиливающееся ощущение, что род человеческий вот-вот уступит место новому виду, которому незачем беспокоиться о шорткатах.

Мы живем сейчас в мире, в котором компьютеры за один день способны выполнить больше расчетов, чем я за всю жизнь. Компьютеры могут проанализировать всю мировую литературу за время, которое уйдет у меня на чтение одного романа. Они способны проанализировать огромное множество вариантов шахматной партии, а я могу удержать в голове всего несколько ходов. Компьютеры могут исследовать контуры и пути, покрывающие Землю, быстрее, чем я дойду до соседнего магазина.

Смог бы сегодняшний компьютер придумать шорткат Гаусса? Зачем ему это, если он может сложить числа от 1 до 100 за мельчайшую долю мгновения ока?

Может ли род человеческий надеяться не отстать от своих кремниевых соседей с их необычайным быстродействием и почти бесконечной памятью? В фильме «Она» 2013 года компьютер заявляет своему хозяину-человеку, что скорость взаимодействия с людьми настолько низка, что он предпочитает проводить время с другими операционными системами, которые могут сравниться с ним быстротой мысли. Люди выглядят с точки зрения компьютеров приблизительно так же, как с нашей точки зрения могут выглядеть медленно растущие и разрушающиеся горы.

Но, возможно, у рода человеческого все же есть нечто дающее ему преимущество. Ограничения нашего мозга, не позволяющие нам одновременно выполнять миллионы вычислений, физические недостатки нашего тела по сравнению с силой механических роботов – все это заставляет человека задумываться о том, нет ли какого-нибудь способа обойти все те шаги, которые кажутся компьютерам и роботам элементарными.

Оказавшись перед неприступной с виду горой, человек пытается найти шорткат. Нельзя ли не взбираться на вершину, а как-нибудь обойти ее? И часто бывает так, что именно такой шорткат приводит к поистине новаторскому способу решения задачи. Пока компьютер упорно трудится, напрягая свои цифровые мышцы, человек незаметно пробирается к финишу, найдя хитроумные шорткаты, избавляющие его от изнурительного труда.

Внимание, лодыри! Я считаю, что от наступления машин нас спасет именно лень. Человеческая лень – свойство, чрезвычайно важное для изобретения новых, более удобных способов работы. Мне часто приходится смотреть на какую-нибудь задачу и думать: это получается слишком сложным; дайте-ка я прервусь и придумаю какой-нибудь шорткат. Мы знаем, что́ скажет в такой ситуации компьютер: «Ну что же, раз у меня есть вот эти инструменты, можно начинать долбить задачу». Но именно потому, что он не устает и не ленится, он, возможно, упускает из виду то, к чему приводит нас наша лень. Поскольку мы не способны решать задачи напрямую, мы вынуждены придумывать хитроумные способы их решения.

Есть много историй об инновациях и изобретениях, появившихся из лени и стремления избежать тяжелой работы. Научные открытия часто делались праздными умами. Говорят, что мысль о кольцевидном строении бензола пришла немецкому химику Августу Кекуле, когда он заснул и увидел во сне змею, заглатывающую собственный хвост. Великий индийский математик Сриниваса Рамануджан часто рассказывал, что ему является во сне покровительствующая его семье богиня Намагири, пишущая математические формулы. Он писал: «Я весь обратился во внимание. Рука выписала несколько эллиптических интегралов. Они врезались мне в память. Как только я проснулся, я записал их на бумаге». Новое изобретение часто появляется у человека, которому лень делать что-либо обычным образом. Джек Уэлч, председатель и генеральный директор компании General Electric, отводил по часу каждый день на «время глядения в окно».

Лень не означает ничегонеделания. Это очень важно. Поиск шорткатов часто требует напряженной работы. В этом есть некий парадокс. Как ни странно, хотя желание найти шорткат может быть порождено стремлением уклониться от работы, его поиски часто приводят к периодам напряженных, энергичных, глубоких размышлений, что помогает избежать не только монотонной работы, но и скуки, которую наводит безделье. Грань между бездельем и скукой тонка, и это обстоятельство часто бывает катализатором поисков шорткатов, которые, в свою очередь, могут потребовать большого труда. Как писал Оскар Уайльд, «ничегонеделанье – самое трудное в мире занятие, самое трудное и самое духовное»[8].

Ничегонеделание часто бывает предвестником великих интеллектуальных свершений. В 2012 году в журнале «Перспективы психологической науки» (Perspectives on Psychological Science) была опубликована статья «Отдых не есть праздность» (Rest Is Not Idleness), из которой явствовало, насколько важен для когнитивных способностей пассивный режим нейронной обработки информации. Этот режим часто подавляется, когда наше внимание слишком фокусируется на внешнем мире. Недавно распространившаяся методика осознанности рекомендует очищение разума от назойливых мыслей в качестве пути к просветлению. Это часто означает отдавать предпочтение не работе, а игре. Но игра может способствовать развитию творческого начала и возникновению новых идей лучше, чем монотонный, механистический мир работы. В этом одна из причин того, что в офисах стартапов и математических факультетов бывает не меньше бильярдных столов и настольных игр, чем компьютеров и столов письменных.

То неодобрение, с которым общество относится к лени, может быть одним из способов контроля и ограничения возможностей тех, кто предпочитает не соответствовать общепринятым нормам. Подлинная причина подозрительности, с которой относятся к лентяю, состоит в том, что его лень – признак человека, не желающего играть по правилам. В шорткате, который позволил Карлу Фридриху Гауссу уклониться от тяжелой работы, его учитель увидел угрозу своему авторитету.

Однако лени не всегда чурались. Сэмюэл Джонсон весьма красноречиво выступал в защиту лени: «Бездельник… не только избегает трудов, часто бывающих бесплодными, но и добивается порой большего, чем те, кто презирает все легкодостижимое»[9]. Как признавала в автобиографии Агата Кристи, «…открытие впрямую происходит от праздности, а может быть, и от лени. Избавиться от неприятностей»[10]. Утверждается, что Бейб Рут, один из рекордсменов по числу хоум-ранов за всю историю бейсбола, стремился выбивать мяч за пределы стадиона, потому что терпеть не мог бегать между базами[11].

---

[8] Из эссе «Критик как художник» (The Critic as Artist, 1891), пер. с англ. А. М. Зверева. Цит. по: *Уайльд О.* Собр. соч.: В 3 т. М.: Терра – Книжный клуб, 2003. Т. 3.

[9] Из первого эссе серии «Бездельник» (The Idler), публиковавшейся в лондонском еженедельнике Universal Chronicle с апреля 1758 по апрель 1760 г.

[10] Цит. по: *Кристи А.* Автобиография / Пер. с англ. В. Чемберджи, И. Дорониной. М.: Вагриус, 1999.

[11] Хоум-ран (*home run*) – игровая ситуация, в которой отбивающий игрок успевает обежать все четыре «базы» поля, пока отбитый им мяч не окажется в руках игрока команды противника. Если ему удается отбить мяч за пределы поля, хоум-ран засчитывается автоматически.

Добровольная работа

Я не хочу сказать, что любая работа – зло. Очень многим та работа, которой они занимаются, приносит огромную пользу. Работа определяет их личность. Она дает им цель. Но важно качество работы. Обычно речь идет не о монотонной, бездумной работе. Аристотель различал два разных вида работы – *праксис* (πρᾶξις), то есть деятельность ради самой деятельности, и *пойезис* (ποίησις), то есть деятельность, направленную на получение некой пользы[12]. Мы с удовольствием ищем шорткаты в деятельности второго рода, но в их применении, когда удовольствие приносит сама работа ради работы, по-видимому, нет большого смысла. Как кажется, работа по большей части подпадает под вторую категорию. Однако идеал, к которому мы стремимся, – это, несомненно, деятельность первого рода. Именно к ней должен вести шорткат. Цель шортката – не избавление от работы, а возможность прийти к работе осмысленной.

Новые политические движения к полностью автоматизированному коммунизму в условиях всеобщей роскоши ставят своей целью, чтобы развитие искусственного интеллекта и робототехники привело к передаче всей неквалифицированной работы от человека машинам, что даст нам время заниматься той деятельностью, которая кажется нам осмысленной. Работа станет предметом роскоши. К списку технологий, ведущих нас к будущему, в котором работа будет выполняться ради удовольствия, а не ради достижения практических целей, следует добавить и развитие действенных шорткатов. Карл Маркс видел в этом – устранении различий между досугом и трудом – одну из целей перехода к коммунизму. «На высшей фазе коммунистического общества… – писал он, – …труд перестанет быть средством для жизни, а станет сам первой потребностью жизни»[13]. Проложенные нами шорткаты обещают увести нас от того, что Маркс называл «царством необходимости», и привести в «царство свободы»[14].

Но бывают ли такие ситуации, в которых без тяжелого труда не обойтись? Как может лентяй научиться играть на музыкальном инструменте? Написать роман? Подняться на Эверест? Даже и здесь я покажу, что сочетание часов работы за столом или обучения с правильно подобранным шорткатом может максимизировать ценность затраченного вами времени. В книге приводятся мои разговоры с другими специалистами, позволяющие понять, бывают ли в их профессиях шорткаты и нельзя ли обойтись без пресловутых десяти тысяч часов, необходимых, по словам журналиста Малкольма Гладуэлла, для достижения высочайшего профессионального уровня.

Мне было интересно узнать, используют ли специалисты в других областях шорткаты, созвучные тем, которые я научился применять в своей профессии – математике. И бывают ли шорткаты других, неизвестных мне типов, которые могли бы навести меня на новые способы мышления о моей собственной работе. Но помимо этого меня увлекают задачи, в решении которых шорткаты невозможны. Что именно не позволяет прокладывать шорткаты в некоторых областях деятельности человека? Снова и снова ограничивающим фактором оказывается человеческий организм. Чтобы изменить наше тело, обучить его или заставить делать нечто новое, очень часто требуются время и повторение, и никаких шорткатов, ускоряющих такие физические преобразования, не существует. Во всех главах нашего путешествия по различным шорткатам, открытым математиками, есть остановки (которые я называю пит-стопами), посвященные шорткатам – или их отсутствию – в других областях человеческой деятельности.

---

[12] Легко заметить, что эти слова родственны русским «практика» и «поэзия». В классификации Аристотеля был и третий вид деятельности – *теория* (θεωρία), то есть деятельность, направленная на познание истины.

[13] Цит. по: *Маркс К.* Критика Готской программы // Избранные произведения: В 2 т. / Под ред. М. Б. Митина. М.: ОГИЗ, Государственное издательство политической литературы, 1940. Т. II. С. 453.

[14] Цит. по: *Маркс К.* Капитал. Критика политической экономии. / Пер. с нем. И. И. Степанова-Скворцова, испр. и доп. Т. 3. Ч. 1 и 2. М.: Государственное издательство политической литературы, 1951. С. 833.

Успех, которого добился на уроке Гаусс, сложивший при помощи своего хитроумного шортката все числа от 1 до 100, усилил в нем желание заниматься развитием своих математических талантов. Его учителю герру Бюттнеру было не по силам взращивать юного математика, но у Бюттнера был помощник, семнадцатилетний Иоганн Мартин Бартельс, бывший столь же страстным любителем математики[15]. Хотя его работой было чинить перья для учеников и помогать им учиться писать, Бартельс с удовольствием снабжал юного Гаусса трудами по математике. Вдвоем они исследовали мир математики, восхищаясь теми шорткатами, которые открывали для них алгебра и матанализ.

Вскоре Бартельс понял, что для испытания талантов Гаусса необходимы более трудные задачи. Ему удалось выхлопотать для Гаусса аудиенцию у герцога Брауншвейгского. Юный Гаусс произвел на герцога настолько сильное впечатление, что тот согласился взять его под свое покровительство и оплатить его обучение в местном колледже, а затем и в Университете Геттингена. Именно там Гаусс начал познавать некоторые из величайших шорткатов, проложенных математиками на протяжении столетий и ставших отправной точкой для его собственных потрясающих математических достижений.

Эта книга – мой выборочный путеводитель по двухтысячелетней истории улучшенного мышления. Освоение хитроумных туннелей или скрытых проходов математического ландшафта заняло у меня несколько десятилетий, а на их создание у математиков, работавших на протяжении всей истории человечества, ушли целые тысячелетия. Но в этой книге я постарался выделить самую суть этих ухищренных стратегий решения сложных задач, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. Она – ваш шорткат к искусству шортката.

---

[15] Интересно отметить, что Бартельс был учителем не только Гаусса, но и Н. И. Лобачевского: с 1808 по 1820 г. он служил профессором Казанского университета.

1
Шорткаты паттернов

У вас в доме есть лестничный пролет с 10 ступеньками. Вы можете идти по лестнице, шагая на каждую ступеньку или через одну. Например, чтобы подняться до верха, вы можете сделать 10 одинарных шагов или 5 двойных. Также можно сочетать одинарные шаги с двойными. Сколько существует возможных комбинаций шагов, позволяющих подняться на самый верх? Эту задачу можно решить «в лоб» – попытаться найти все комбинации, поднимаясь и спускаясь по лестнице. Но как решил бы ее юный Гаусс?

Хотите узнать шорткат к увеличению зарплаты на 15 процентов при выполнении той же самой работы? Или, может быть, шорткат к превращению небольшой инвестиции в крупный капитал? А как насчет шортката к пониманию вероятного поведения курса каких-нибудь акций в ближайшие месяцы? Не кажется ли вам, что вы снова и снова изобретаете колесо[16] и в то же время ощущаете, что между всеми этими колесами, которые вы создаете, есть какая-то связь? Не хотите ли получить шорткат, который поможет вам улучшить «вашу ужасную память»?

Я перейду прямо к делу и расскажу вам об одном из самых эффективных шорткатов, открытых человеком. Это умение замечать паттерны. Способность человеческого разума различать в окружающем нас хаосе паттерны подарила нашему виду в высшей степени замечательный шорткат: возможность знать будущее еще до того, как оно станет настоящим. Если вы можете увидеть в данных, описывающих прошлое и настоящее, некий паттерн, то, продлив его еще дальше, вы получаете возможность предсказать будущее. Не дожидаясь его наступления. На мой взгляд, могущество паттернов составляет самую суть и самый действенный шорткат математики.

Паттерны позволяют нам увидеть, что числа изменяются по одним и тем же правилам, даже если сами числа различны. Выявив правило, лежащее в основе паттерна, я могу не повторять одну и ту же работу каждый раз, как мне встретится новый набор данных. За меня работает паттерн.

В экономике полно данных, следующих паттернам, которые, если только их правильно распознать, могут привести нас к будущему процветанию. Хотя, как я объясню ниже, некоторые паттерны бывают обманчивы – мир увидел это на примере финансового краха 2008 года. Паттерны в численности зараженных вирусом позволяют нам отследить траекторию распространения пандемии и вмешаться, прежде чем она станет слишком смертоносной. Космические паттерны помогают нам понимать наше прошлое и будущее. Из чисел, описывающих, как звезды удаляются от нас, мы вывели паттерн, который говорит нам, что наша Вселенная началась с Большого взрыва, а в будущем закончится холодным состоянием, которое называют тепловой смертью.

Именно эта способность выискивать паттерны в астрономических данных и позволила начинавшему карьеру юному Гауссу завоевать на мировой сцене славу мастера шортката.

[16] По-русски чаще говорят об изобретении велосипеда. Однако многое из того, о чем говорится в этой книге, произошло задолго до этого изобретения – так что тут, видимо, имеет смысл воспроизвести английскую идиому дословно.

Паттерны планетарные

В день нового, 1801 года в Солнечной системе была обнаружена восьмая планета, орбита которой проходила где-то между Марсом и Юпитером. Ее нарекли Церерой, и в ее открытии все видели великое предзнаменование будущего науки в только что начавшемся XIX веке.

Однако всего через несколько недель восторг сменился отчаянием: маленькая планета (бывшая на самом деле всего лишь астероидом), приблизившись к Солнцу, исчезла из виду, потерялась среди множества звезд. Астрономы понятия не имели, куда она делась.

Тогда прошел слух, что некий 24-летний юноша из Брауншвейга заявил, будто знает, где искать пропавшую планету. Он сказал астрономам, куда им нужно направить свои телескопы, – и как будто по волшебству, Церера действительно оказалась там. Этим молодым человеком был не кто иной, как мой герой, Карл Фридрих Гаусс.

После первых школьных достижений в девятилетнем возрасте Гаусс продолжил совершать интереснейшие математические открытия, в том числе изобрел способ построения правильного семнадцатиугольника при помощи только линейки и циркуля. Эта задача оставалась нерешенной в течение 2000 лет, с тех самых пор, как древние греки начали придумывать хитроумные способы построения геометрических фигур. Гаусс был так горд этим свершением, что начал вести математический дневник, в который заносил в последующие годы свои поразительные открытия в области чисел и геометрии. Но особенно его заинтересовали данные новой планеты. Можно ли найти в величинах, измеренных до исчезновения Цереры за Солнцем, логику, которая объяснила бы, где ее искать? В конце концов он разгадал и этот секрет.

Разумеется, в его великом астрономическом свершении не было никакого волшебства. Одна лишь математика. Астрономы открыли Цереру по случайности. Применив средства математического анализа, Гаусс выявил паттерн, скрывавшийся за числами, которые описывали положение этого астероида, и узнал, где он должен оказаться в будущем. Конечно, паттерны динамики космических тел замечали и до него. Астрономы использовали этот шорткат к ориентации в ночном небе для составления предсказаний и планирования будущего с тех самых пор, как род человеческий понял, что между будущим и прошлым существует связь.

Благодаря паттерну смены времен года крестьяне могли планировать сев. Каждое время года соответствовало особому расположению звезд. Паттерны поведения – миграции и спаривания – животных позволяли древнему человеку охотиться в наиболее удобные для этого моменты, когда можно получить максимальную добычу с минимальной затратой сил. Способность предсказывать затмения делала предсказателя важным членом племени. Хорошо известно, что в 1503 году, когда суда Христофора Колумба сели на мель на Ямайке, он спас свой экипаж, попавший в плен к местным жителям, воспользовавшись своими знаниями о надвигавшемся лунном затмении. Туземцев так поразила его способность предсказывать исчезновение Луны, что они согласились отпустить пленников на свободу.

Назовите следующее число

Суть поиска паттернов идеально выражают задачи, которые вам, вероятно, приходилось решать в школе: вам дают последовательность чисел и просят определить следующее число в этой последовательности. Я очень любил такие задачи, которые наш учитель выписывал мелом на доске. Чем больше времени уходило у меня на поиски паттерна, тем более ценным казался найденный в конце концов шорткат. Этот урок я усвоил довольно рано. Обнаружение самых лучших шорткатов часто занимает много времени. Оно требует усилий. Но стоит найти такой шорткат, и он становится частью вашего инструментария познания мира и вы можете использовать его снова и снова.

Вот несколько заданий, которые помогут активировать ваши нейроны, занимающиеся поиском шорткатов, основанных на паттернах. Каким будет следующее число в этой последовательности?

1, 3, 6, 10, 15, 21 …

Не слишком сложная задача. Вы, вероятно, заметили, что на каждом шаге всего лишь прибавляется следующее по порядку число. Следующее число равно 21 + 7, то есть 28. Эти числа называются треугольными, потому что они соответствуют количеству камешков, которые нужны для построения треугольника: на каждом шаге к треугольнику добавляется еще один ряд камешков. Но существует ли шорткат, позволяющий найти сотое число, не перебирая все предыдущие 99? Собственно говоря, это именно та задача, которую пришлось решить Гауссу, когда учитель задал ему сложить все числа от 1 до 100. Гаусс нашел хитроумный шорткат и вычислил ответ, складывая числа попарно. В более общем случае, если вам нужно найти n-е треугольное число, прием Гаусса выражается следующей формулой:

$$1/2 \times n \times (n + 1).$$

Эти треугольные числа продолжали интересовать Гаусса с тех самых пор, как он впервые познакомился с ними на уроке герра Бюттнера. Более того, одна из записей в его математическом дневнике от 10 июля 1796 года состоит из греческого восклицания «Эврика!», за которым следует формула:

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Гаусс открыл следующий весьма замечательный факт: любое число может быть записано в виде суммы не более трех треугольных чисел. Например, 1796 = 10 + 561 + 1225. Наблюдения такого рода могут порождать очень полезные шорткаты: вместо того чтобы доказывать, что некоторое утверждение справедливо для всех чисел, может быть достаточно доказать его для треугольных чисел, а затем использовать открытое Гауссом правило, что любое число есть сумма трех треугольных чисел.

Вот еще одна задача. Назовите следующее число в последовательности:

1, 2, 4, 8, 16 …

Тоже ничего сложного. Следующее число – 32. На каждом шаге члены этой последовательности удваиваются. Эта зависимость, которую называют экспоненциальным ростом, управляет ростом многих величин; поэтому важно понимать, как работают такого рода паттерны. К примеру, поначалу последовательность выглядит вполне невинно. Именно так, видимо, считал индийский царь, согласившийся заплатить создателю шахмат ту цену, которую тот просил за свою игру. Изобретатель попросил положить на первую клетку шахматной доски одно рисовое зерно, а затем удваивать число рисинок на каждой следующей клетке. Первый ряд клеток выглядел вполне безобидно. На нем оказалось всего лишь 1 + 2 + + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255 зерен риса. Этого едва хватило бы и на одно суши.

Но слуги царя добавляли на доску все больше и больше риса, и вскоре их запасы иссякли. Чтобы заполнить половину клеток, понадобилось около 280 000 килограммов риса. И это была легкая половина доски. Сколько же зерен риса царь должен был отдать изобретателю? Этот вопрос похож на одну из задач, которые мог задавать своим бедным ученикам герр Бюттнер. Есть трудный способ решить ее: нужно сложить все 64 разных числа. Кто же захочет заниматься такой тяжелой работой? И как подошел бы к такому заданию Гаусс?

Для этого вычисления существует очень красивый шорткат, но на первый взгляд может показаться, что он только усложняет задачу. Вначале часто кажется, что шорткат ведет не к цели, а в прямо противоположном направлении. Прежде всего я дам суммарному числу зерен риса имя: я назову его X. Это одно из самых популярных имен в математике; как я покажу в главе 3, оно и само по себе является могущественным шорткатом из арсенала математика.

Для начала я удвою то число, которое пытаюсь вычислить:

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Казалось бы, это только осложняет мне жизнь. Но посмотрите, что я сделаю дальше. Раскроем скобки:

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Теперь применим одну хитрость. Я собираюсь вычесть из этого выражения X. На первый взгляд кажется, что тогда мы вернемся туда же, откуда начали: $2X - X = X$. Какой в этом толк? Чудо происходит тогда, когда я заменяю $2X$ и X на суммы, которые я выписал выше:

$$2X - X = (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Почти все слагаемые взаимно уничтожаются! Не уничтожаются только 2^{64} из первой части и 1 из второй. Таким образом, у нас остается только следующее выражение:

$$X = 2X - X = 2^{64} - 1.$$

Вместо множества вычислений нужно выполнить всего одно – и мы узнаем, чему равно число зерен риса, которые нужно было собрать царю, чтобы заплатить изобретателю шахмат:

18 446 744 073 709 551 615.

Оно превышает количество риса, выращенного на всей нашей планете за последнее тысячелетие. Мораль здесь та, что иногда для избавления от тяжелой работы можно заняться другой тяжелой работой, после которой задачу оказывается гораздо легче проанализировать.

Как выяснил на собственном горьком опыте царь, удвоение только сначала выглядит невинно, а потом очень быстро взлетает ввысь. Таково могущество экспоненциального роста. Этот эффект ощущают на себе те, кто занимает деньги, чтобы покрыть долги. На первый взгляд предложение компании, дающей 1000 фунтов под 5 процентов в месяц кажется спасительным. Месяц спустя вы оказываетесь должны ей всего 1050 фунтов. Но проблема заключается в том, что через каждый следующий месяц сумма долга умножается еще на 1,05. Через два года долг составляет уже 3225 фунтов. К пятому году он возрастает до 18 679 фунтов. Такая система очень выгодна кредитору, но не должнику.

Тот факт, что многие не понимают этого паттерна экспоненциального роста, означает, что он вполне может быть шорткатом к разорению. Компании, выдающие «кредиты до зарплаты», успешно пользуются такой неспособностью понять, к чему приведет в будущем этот паттерн, навязывая беззащитным клиентам договоры, выглядящие на первый взгляд весьма привлекательно. Чтобы не разориться и не оказаться в беспомощном положении, без какой бы то ни было возможности вернуться в безопасное состояние, важно вовремя понять, насколько опасно удвоение и куда оно может нас завести.

Все мы познали ужасающую скорость экспоненциального роста – с дорого обошедшимся нам запозданием – на примере пандемии коронавируса 2020 года. Число инфицированных удваивалось в среднем каждые три дня, и это привело к перегрузке системы здравоохранения.

В то же время могущество экспоненциальной зависимости также помогает объяснить, почему на Земле (вероятно) нет вампиров. Чтобы выжить, вампиру нужно питаться человеческой кровью не реже раза в месяц. Проблема заключается в том, что тот, чьей кровью питается вампир, тоже становится вампиром. Поэтому в следующем месяце вампиров, ищущих человеческой крови, становится в два раза больше.

Численность населения мира оценивается приблизительно в 6,7 миллиарда человек. Численность вампиров каждый месяц удваивается. Сокрушительная сила удвоения такова, что всего за 33 месяца один-единственный вампир превратит в вампиров все население мира.

На случай же, если вы все-таки встретитесь с вампиром, вот вам полезный прием из арсенала математика, позволяющий защититься от кровососущего чудовища. Помимо классических средств – чеснока, зеркал, распятий – есть один довольно необычный способ избавиться от Князя Тьмы: нужно рассыпать вокруг его гроба маковое семя. Оказывается, вампиры страдают арифмоманией – патологическим стремлением считать. Теоретически Дракула не должен успеть закончить подсчет маковых семян, рассыпанных вокруг его ложа, пока взошедшее солнце не загонит его обратно в гроб.

Арифмомания – тяжелое заболевание. Этим расстройством страдал изобретатель Никола Тесла, исследованиям которого в области электричества мы обязаны переменным током. Он был одержим числами, делящимися на три: требовал, чтобы у него каждый день было ровно 18 чистых полотенец, и считал свои шаги, чтобы их число непременно делилось на три. Возможно, самое известное из художественных описаний арифмомании – это образ Графа фон Знака из «Улицы Сезам», вампира, который помог многим поколениям телезрителей сделать первые шаги по пути математики[17].

[17] Имя графа в оригинале – *Count von Count* – обыгрывает существующую в английском омонимию слов «граф» (*count*) и «[под]счет» (*count*).

Паттерны городские

Вот чуть более трудная последовательность чисел. Сможете ли вы найти паттерн в ней?

179, 430, 1033, 2478, 5949 …

Здесь нужно разделить каждое число на предыдущее. Коэффициент получается равным 2,4. Это по-прежнему экспоненциальный рост, но интересно не это, а то, что́ на самом деле выражают эти числа.

Это количество патентов, выданных в городах с населением 250 000, 500 000, 1 миллион, 2 миллиона и 4 миллиона человек. Оказывается, что при удвоении населения города число патентов не просто удваивается, как можно было бы предположить. Чем крупнее город, тем более творческим он кажется. По-видимому, удвоение численности населения добавляет к творческому потенциалу лишние 40 процентов! И такой паттерн роста проявляется не только в патентах.

Несмотря на огромные культурные различия между Лондоном, Рио-де-Жанейро и Гуанчжоу, существует математический паттерн, связывающий все города от Бразилии до Китая. Мы привыкли описывать их, опираясь на особенности их географического положения и истории, подчеркивая индивидуальные отличия каждого места – Нью-Йорка или Токио. Но это всего лишь детали, интересные случайности, мало что объясняющие. Если же взглянуть на город глазами математика, начинают проявляться универсальные черты, не зависящие от политических и географических границ. Эта математическая точка зрения позволяет понять, чем именно привлекают нас города… и доказывает, что чем больше, тем лучше.

Математика показывает, что рост каждого из ресурсов города можно описать одним-единственным волшебным числом, характерным для этого ресурса. При каждом удвоении численности населения города его социальные и экономические параметры тоже увеличиваются, но не просто вдвое, а чуть больше. Замечательно, что для многих ресурсов это «чуть больше» составляет около 15 процентов. Например, если сравнить город с населением 1 миллион человек с городом с населением 2 миллиона, то окажется, что ресторанов, концертных залов, библиотек, школ в более крупном городе больше не в два раза: их количество больше удвоенного на 15 процентов.

Это правило масштабирования затрагивает даже зарплаты. Если взять двух работников, выполняющих в точности одну и ту же работу, но в городах разных размеров, то зарплата работника, живущего в городе с населением 2 миллиона, в среднем будет на 15 процентов выше, чем у работника из города, в котором всего 1 миллион жителей. Если удвоить численность населения еще раз, до 4 миллионов человек, зарплата увеличится еще на 15 процентов. Чем крупнее город, тем больше вы получаете, хотя работа остается той же самой.

Выявление таких паттернов может стать ключевым фактором, позволяющим компании извлечь максимальную прибыль из капиталовложений. Города бывают самых разных форм и размеров. Понимание того, что форма не важна, а размер имеет значение, дает компании возможность вкладывать средства гораздо более рационально, просто переехав в город в два раза большего размера.

Этот странный всеобщий принцип масштабирования был открыт не экономистами или социологами, а физиком-теоретиком, использовавшим те же математические методы анализа, которые обычно применяют в исследованиях фундаментальных законов, лежащих в основе Вселенной. Джеффри Уэст, родившийся в Великобритании, изучал физику в Кембридже, а затем работал в Стэнфорде, занимаясь исследованиями свойств элементарных частиц. Но к открытиям в области роста городов его подтолкнул переход на должность президента Института Санта-Фе. Этот институт специализируется на программах, позволяющих взаимодействовать и обсуждать идеи специалистам, работающим в разных дисциплинах. Шорткат к разрешению загадок в одной области очень часто бывает ответвлением, которое проходит через какую-нибудь другую область, на первый взгляд совершенно не связанную с первой.

Именно та смесь математики, физики и биологии, которая бурлила в Институте Санта-Фе, заставила Уэста задуматься над следующим вопросом: существуют ли у городов, разбросанных по всему миру, универсальные характеристики, подобные универсальным свойствам электронов или фотонов, не зависящим от того, в какой точке Вселенной они находятся?

Нетрудно поверить, что математика лежит в основе фундаментальных законов мироздания, что при помощи математики можно объяснить гравитацию или электричество. И вместе с тем город кажется непостижимой массой людей, у каждого из которых свои мотивации, свои желания, свои повседневные дела. Но, когда мы пытались разобраться в окружающем нас мире, мы выяснили, что математика – это код, управляющий не только нашим миром и всем, что в нем содержится, но и нами самими. Даже силы, управляющие суматошным существованием миллионов индивидуумов, тоже подчиняются неким паттернам.

Уэст и его сотрудники собрали данные по тысячам городов всего мира. Они учитывали все, от суммарной длины электрических кабелей во Франкфурте до числа людей с высшим образованием в городе Бойсе, штат Айдахо. Они регистрировали статистические данные по автозаправочным станциям, личным доходам, вспышкам гриппа, убийствам, кофейням и даже скорости передвижения пешеходов. Однако не всю эту информацию можно было найти в Сети. Когда Уэст пытался расшифровать объемистый справочник по провинциальным городам Китая, ему приходилось разбирать надписи на севернокитайском языке. Когда накопленные числа стали анализировать, начал проявляться скрытый код. Если численность населения одного города была вдвое больше, чем у другого, в каких бы точках мира эти города ни находились, в соотношении социальных и экономических факторов обнаруживалось одно и то же волшебное число – дополнительные 15 процентов[18].

Сейчас в городах живет более 50 процентов мирового населения. Та добавка к экспоненциальному росту, которую дает коэффициент масштабирования Уэста, вполне может быть ключевым элементом привлекательности городов. По-видимому, когда большое количество людей оказывается вместе, получаемые результаты становятся больше, чем изначальные вложения. Вероятно, поэтому люди и переезжают в большие города. Когда человек перебирается в город вдвое большего размера, он внезапно начинает получать на 15 процентов больше – во всех областях.

Тот же закон масштабирования затрагивает и инфраструктуру, но в обратном направлении. Оказывается, при удвоении размера города не требуется вдвое больше материалов: действует экономия на инфраструктуре. Стоимость медного провода, асфальта, канализационных труб на душу населения уменьшается на 15 процентов. Это означает, что вопреки распространенному мнению и ваш личный «углеродный след» оказывается тем меньше, чем крупнее город, в котором вы живете.

К сожалению, этот математический принцип определяет масштабирование не только положительных аспектов. Преступность, заболеваемость и плотность дорожного движения возрастают с тем же коэффициентом. Если, к примеру, вам известен уровень заболеваемости СПИДом в городе с 5-миллионным населением, то для оценки этого же показателя для города, в котором живут 10 миллионов человек, первую цифру нужно не просто удвоить, а еще и добавить к результату 15 процентов. Все те же волшебные 15 процентов.

---

[18] Подробнее о вопросах масштабирования и исследованиях Уэста можно прочитать в его книге: *Уэст Дж.* Масштаб: Универсальные законы роста, инноваций, устойчивости и темпов жизни организмов, городов, экономических систем и компаний / Пер. с англ. Д. А. Прокофьева. М.: Азбука Бизнес, Азбука-Аттикус, 2018.

Есть ли объяснение такому универсальному масштабированию самых разных городов? Существует ли что-то вроде ньютоновского закона всемирного тяготения, применимого ко всему на свете – от яблок до планет и черных дыр?

Чтобы понять, почему город определяется не физическими размерами, а численностью населения, важнее всего осознать, что город состоит не из зданий и улиц, а из людей, которые в нем живут. Город – это сцена, на которой разыгрывается история цивилизации, и разыгрывают ее не актеры, а акторы. Города ценны постольку, поскольку они выполняют функцию сетей, обеспечивающих возможность взаимодействия между людьми.

Значит, модель города должна отражать не его географическое положение, будь то на острове или посреди пустыни, а сетевую структуру взаимодействий его жителей. По-видимому, свойство универсальной масштабируемости, открытое Уэстом, определяется именно качеством сети, возникающей из взаимодействий горожан. Таково могущество математики. Она позволяет увидеть простые структуры, находящиеся в самом сердце нашей сложной среды.

Если взять предельный случай – когда по мере роста города каждый житель контактирует со всеми остальными, – можно увидеть, почему крупный город порождает сверхлинейный рост. Если численность его населения равна N, максимальным числом связей между ними будет количество разных рукопожатий, которые могут совершить эти N жителей. Выстроим их в ряд и пронумеруем от 1 до N. Горожанин номер 1 проходит вдоль ряда, пожимая всем руки, – всего $N - 1$ рукопожатий. После него вдоль ряда проходит горожанин номер 2. Он уже пожал руку горожанину № 1, так что он прибавляет к сумме $N - 2$ рукопожатий. Так продолжается и дальше, и на долю каждого следующего горожанина приходится на одно рукопожатие меньше. Общее число рукопожатий равно сумме чисел от 1 до $N - 1$. Давно не виделись! Это то самое вычисление, которое задали Гауссу. Его шорткат дал формулу для вычисления этого числа:

$$1/2 \times (N - 1) \times N.$$

Что происходит с количеством связей при удвоении N? Число рукопожатий не удваивается, а увеличивается в 2 в квадрате – то есть 4 – раза. Число рукопожатий пропорционально квадрату числа жителей города.

Этот пример прекрасно показывает, почему математика может избавить нас от необходимости снова и снова изобретать колесо. Хотя я задал совершенно другой вопрос, касавшийся связей в сети, оказалось, что для анализа роста этого числа у меня уже есть инструменты, полученные из анализа треугольных чисел. Действующие лица могут то и дело меняться, но сценарий остается тем же. Стоит понять этот сценарий, и в вашем распоряжении оказывается шорткат к пониманию поведения любых персонажей пьесы. В данном случае число связей между горожанами растет с увеличением их количества квадратично.

Разумеется, каждый житель города никак не может быть знаком со всеми остальными. Более консервативной гипотезой будет предположение о том, что горожане знакомы с жителями своего района. Но эта величина масштабируется линейно; общие размеры не имеют существенного значения.

Судя по всему, связи между жителями городов находятся где-то между этими двумя предельными случаями. Горожанин поддерживает все свои местные связи плюс несколько более дальних связей в других частях города. По-видимому, именно такие дальние связи и приводят к тому, что при удвоении численности населения количество связей увеличивается на лишние 15 процентов. Как я объясню в последующих разделах этой книги, сети такого типа возникают во многих разных сценариях, и это обстоятельство оказывается чрезвычайно удобным для прокладки шорткатов.

Паттерны обманчивые

Хотя паттерны обладают невероятной силой, использовать их следует с осторожностью. Вы можете отправиться по такому пути, считая, что, вероятно, знаете, куда вы идете. Но иногда этот путь может завернуть в странном и неожиданном направлении. Возьмем ту последовательность, которую я предлагал вам решить раньше:

1, 2, 4, 8, 16 …

Что, если я скажу вам, что следующее число в этой последовательности – не 32, а 31?

Если взять круг, отмечать на его окружности точки и соединять все эти точки прямыми линиями, каково будет максимальное число областей, на которые можно разделить этот круг? Если точка всего одна, никаких линий не будет и область получится тоже всего одна. Если добавить еще одну точку, две точки можно соединить линией, которая разделит круг на две области. Добавим третью точку. Проведя все возможные линии, соединяющие эти точки, получим треугольную фигуру, окруженную тремя секторами круга: всего четыре области.

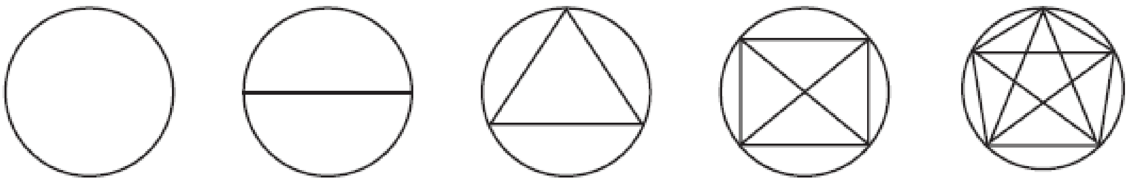


Рис. 1.1. Первые пять чисел деления круга

Если продолжить действовать таким же образом, кажется, что проявляется паттерн. Вот данные по числу областей, получающихся при добавлении очередных точек на окружности:

1, 2, 4, 8, 16 …

В этот момент разумно предположить, что добавление очередной точки удваивает число областей. Проблема заключается в том, что этот паттерн нарушается, как только я добавляю шестую точку. Как ни старайся, число областей, на которые линии разбивают круг, оказывается равным 31. А вовсе не 32!

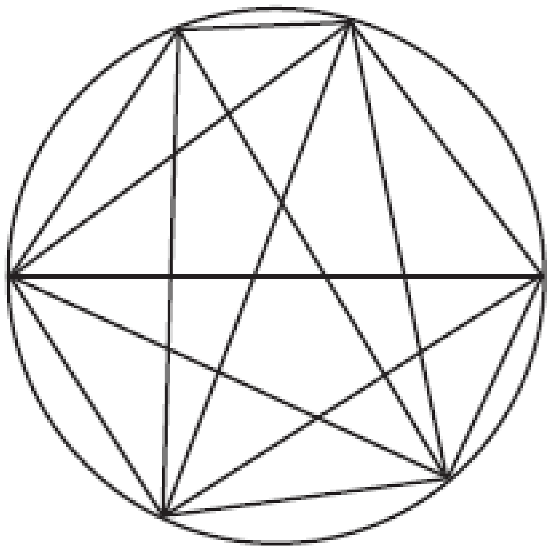


Рис. 1.2. Шестое число деления круга

Для числа областей существует формула, но она чуть сложнее, чем простое удвоение. Если на окружности есть N точек, максимальное число областей, которые можно получить, соединяя эти точки, равно

$$1/24\ (N^4 - 6N^3 + 23N^2 - 18N + 24).$$

Мораль тут следующая: важно знать, что именно описывают ваши данные, а не полагаться на одни лишь числа. Обработка данных может быть делом опасным, если она не сочетается с глубоким пониманием того, откуда взялись эти данные.

Вот еще одно предостережение относительно шорткатов такого рода. Каким должно быть следующее число в этой последовательности?

2, 8, 16, 24, 32 …

В ней много степеней двух. Но что там делает число 24? В общем, если вы сумели заключить, что следующее число этой последовательности – 47, я советую вам в ближайшую же субботу купить лотерейный билет. Это выигрышные номера тиража британской Национальной лотереи, разыгранного 26 сентября 2007 года. Мы настолько пристрастились к поиску паттернов, что часто видим их там, где никакого паттерна ожидать нельзя. Лотерейные билеты выпадают случайным образом. Без паттернов. Без тайных формул. Шорткатов к миллионным состояниям не бывает. Однако в главе 8 я объясню, что даже случайные вещи следуют неким паттернам, которые можно рассматривать в качестве потенциальных шорткатов. Если речь идет о случайностях, шорткатом будет рассмотрение долгосрочной перспективы.

Концепцию паттерна можно использовать в качестве шортката к пониманию того, действительно ли какое-либо явление случайно, и этот метод имеет отношение к легкости запоминания числовых последовательностей.

Шорткат к хорошей памяти

Поскольку в интернете каждую секунду появляется огромное количество данных, компании ищут более рациональные способы их хранения. Выявление паттернов в данных облегчает их сжатие, благодаря которому для их хранения требуется меньше места. Именно эта идея лежит в основе технологий, подобных форматам JPEG или MP3.

Конец ознакомительного фрагмента.