

Элви Рэй Смит
Пиксель. История одной точки
Серия «Individuum»

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=69467503
Пиксель. История одной точки: Individuum; Москва; 2023
ISBN 978-5-6048295-0-9

Аннотация

Пиксели окружают нас – на экранах смартфонов и компьютеров, на рекламных щитах и дисплеях электронных часов. От наивного пиксель-арта до умопомрачительных 8К-рендеров, большая часть того, что мы видим, сделана из пикселей. Мы редко о них задумываемся, а ведь пиксели таят в себе неожиданную красоту компьютерных вычислений и служат фундаментом нашей виртуальной повседневности.

Автор этой книги знаком с пикселями как никто другой. Элви Рэй Смит – один из основоположников современной анимации, соучредитель Pixar и подразделения компьютерной графики Lucasfilm. Посвятив больше 50 лет работе с цифровыми изображениями, Смит написал их исчерпывающую и увлекательную биографию, в которой находится равное место для размышлений об истории искусства, технологиях и бизнесе. «Пиксель» проведет вас от открытий Фурье на заре Французской революции, первых компьютеров, пикселей и хакеров до создания

«Истории игрушек» и «Ледникового периода», роли Стива Джобса в судьбе Pixar и прогресса в VR и нейросетях.

Содержание

Начало: сигнальное событие	7
Основы: три великие идеи	22
1. Частоты Фурье: музыка мира	22
Всё на свете музыка	23
Жажда бессмертия	25
Волна	31
Звуки	39
Наполеон Бонапарт	43
Встреча Фурье с Бонапартом	44
Зрение	48
Розеттский камень	57
Морщины и борозды	58
Жажда тепла	67
Танцы с тиранами	73
Жозеф и Софи	76
Стать бессмертным	78
Природа гения	81
2. Отсчеты Котельникова: нечто из ничего	84
Разбрасыватель	86
Происхождение, работы и карьера	89
Цифровые и аналоговые бесконечности	94
Пиксель	100
Игры в имена	103

Разбрасывай и складывай
Конец ознакомительного фрагмента.

107

114

Элви Рэй Смит

Пиксель. История одной точки

Alvy Ray Smith

A Biography of the Pixel

© 2021 by Alvy Ray Smith, Massachusetts Institute
of Technology

© А. Снигиров, перевод, 2023

© ООО «Индивидуум Принт», 2023

* * *

Посвящается

*Элисон, моей любимой жене,
Сэму и Джесси, моим дорогим сыновьям, и Лео,
Атти, Джорджи, Оги и Эвелин, моим обожаемым
и разрушительным внукам*

Начало: сигнальное событие

Не делай себе кумира и никакого изображения того, что на небе вверху, и что на земле внизу, и что в воде ниже земли.

– Исход 20:4

В начале – конечно, задолго до библейского табу – было наскальное изображение. В мерцающем свете пламени казалось, что оно двигалось. Изображение на стене пещеры Альтамира в Испании – это одновременно *и* шагающий кабан, *и* камень, на котором его нацарапал древний художник, *и* использованные им уголь и охра. В течение примерно 20 тысячелетий в мире не было другого места, где удалось бы посмотреть на этого добиблейского борова. Только в пещере Альтамира, в мерцающем свете костра, на экране кинотеатра эпохи палеолита, можно было увидеть, как двигаются его ноги и покачивается голова.



Рис. 0.1 Шагающий кабан. Альтамира, ок. 20 000 г. до н. э.

Да что там палеолит – всего два столетия назад, в 1800 году, и картина «Бонапарт на перевале Сен-Бернар», и холст, на котором Жак-Луи Давид написал ее, и масляные краски, которые он использовал, составляли единое целое. Представьте, что вы, находясь в Европе, захотели бы поделиться с друзьями из Нью-Йорка этим восхитительным агиографическим изображением Наполеона. Еще нет ни сотовых телефонов, ни видеокамер, не изобрели даже фотографию. Единственный способ показать его там – привезти саму картину, если вы, конечно, отважитесь на такое. Эстамп, офорт или набросок могли бы познакомить жителей Нью-Йорка с этой замечательной картиной, но любая копия, хорошая

или плохая, – это уже новое изображение, неспособное всецело и точно передать оригинал.

Все это время картина и средства ее создания оставались едины. Никто даже и не задумывался о возможности разделить их. Да и чем могло бы быть изображение без носителя?

Затем, в начале XIX века, изобретение фотографии положило начало миру, в котором есть то, что мы сейчас называем «медиа», – средства передачи информации. Настала эра, когда оказалось возможным точное воспроизведение. В конце XIX века появился кинематограф, а в начале XX – телевидение. Все медиа тогда были аналоговыми, сообщения передавались пропорционально и непрерывно. Появившаяся возможность переносить изображение с одного носителя на другой намекала, что в изображении есть нечто, существующее отдельно от носителя.

Понятие «цифрового» кодирования информации – дискретного и прерывистого – практически не рассматривалось по крайней мере до 1933 года. К середине 1950-х существовало лишь несколько цифровых изображений. Немногочисленные осведомленные о них специалисты считали, что такие легкомысленные эксперименты с картинками отвлекают внимание от серьезных проектов цифровых компьютеров. Все остальные изображения в мире создавались и воспроизводились исключительно аналоговыми средствами: маслом на холсте, типографской краской на бумаге, эмульсией на фотопленке и некоторыми другими.

На стыке тысячелетий, к 2000 году, произошло неожиданное событие – Великая цифровая конвергенция. Единый новый цифровой носитель – всемогущий бит – вытеснил почти всех аналоговых конкурентов. Бит стал универсальным носителем информации, а особая упаковка из битов – пиксель – покорила мир. Стало возможным, так сказать, отделить картину от холста. В результате большинство изображений в мире теперь существуют в цифровом виде. Аналоговые изображения практически исчезли, повсеместно вытесненные цифровыми. Возможно, лишь музеи и детские сады – те редкие места, где есть вероятность найти аналоговые изображения.

Моя книга расскажет об этом революционном событии тысячелетия, восславив Цифровой Свет – обширное царство, включающее в себя любое изображение, созданное из пикселей. Оно простирается от паркоматов до виртуальной реальности, от приборных панелей до цифрового кино и телевидения, от аппаратов МРТ до видеоигр, дисплеев мобильных телефонов и многого, многого другого – всего, что использует пиксели.

Самое удивительное в новом носителе – это его невидимость. Невидимы биты и состоящие из них пиксели. Не следует путать, как это часто бывает, пиксели, о которых я говорю, с теми маленькими светящимися областями на экране, которые называются элементами отображения. Техническая суть моей книги – объяснить, как делаются видимыми изоб-

ражения, состоящие из невидимого материала, как цифровые пиксели преобразуются в аналоговые элементы отображения.

Великая цифровая конвергенция прилась на границу тысячелетий по чистой случайности, но довольно удачно. Первый цифровой фильм «История игрушек» студия Pixar выпустила в 1995 году. В 1998 году впервые передан цифровой телевизионный сигнал высокой четкости (HDTV). Цифровая видеочка, способная по качеству съемки составить конкуренцию традиционному пленочному оборудованию, потрясла рынок в 1999-м. Цифровой диск для записи видео, получивший название DVD, дебютировал в 2000 году. Apple представила прорывной смартфон iPhone в 2007 году. То, что раньше было книгами, фотографиями, кино и телевидением, превратилось – в мгновение ока, по меркам истории – просто в последовательности битов. Изменения произошли настолько быстро, что уже выросло молодое поколение, которое, возможно, не сталкивалось с нецифровыми медиа нигде, кроме последних аналоговых оплотов – дошкольных учреждений и музеев изобразительных искусств.

Все мы теперь плывем по цифровому океану пикселей. Я ношу с собой миллиарды их и подозреваю, что вы тоже. Однако странно, что на это глобальное изменение в нашем повседневном опыте до сих пор не обращали серьезного внимания. Возможно, большинство людей еще не осознали, что Цифровой Свет – это единая унифицированная технология.

И это новая идея. Прояснить ее – главная цель моей книги.

Основы: три великие идеи

Всего три идеи – волновые колебания, машинные вычисления и пиксели – лежат в основе всей кажущейся сложности Цифрового Света. Каждая из них интуитивно проста, глубока и красива. Это краеугольные камни нашего современного мира, и, чтобы разобраться в них, не нужна математика. Первые три главы этой книги будут посвящены этим фундаментальным идеям и увлекательным историям о людях, которые сделали возможным их практическое применение.

Идея волновых колебаний – аналоговая. Вы, наверное, знаете, что музыка состоит из одновременных звуковых волн разной частоты (высота тона) и амплитуды (громкость). Два столетия назад французский математик Жозеф Фурье распространил это понятие на *весь* наш чувственный опыт. Все, что мы видим и слышим, – это сумма волн разной частоты и амплитуды. Всё – музыка. В этой книге я покажу вам, как увидеть музыку в изображении.

Компьютеры – идея цифровая. Машины, ускоряющие вычисления, – пример проникновения цифровых технологий в повседневную жизнь. Но сама идея вычислительных машин возникла только в 1936 году, когда англичанин Алан Тьюринг придумал их, чтобы продемонстрировать возможность аккуратного исполнения систематических процессов.

Это может показаться непонятным и скучным человеку, но достаточно взглянуть на последствия, чтобы убедиться в обратном. Компьютер стал самым гибким и универсальным инструментом человека. А потрясающая скорость, с которой он производит вычисления, – величайшее инженерное чудо всех времен. Скорость работы компьютеров невообразимо и многократно усиливает возможности нас, ничтожных людишек.

Но вся ошеломляющая, изменившая наш мир мощь компьютеров на самом деле сводится к аккуратному переключению между двумя состояниями, часто называемыми 0 и 1. Все их вычисления – это биты. Это может показаться тривиальным, но я надеюсь вдохновить вас неожиданной красотой и загадочностью компьютерных вычислений. Опять же, никакой математики нам не потребуется.

И наконец, самая важная, но наименее известная из этих трех фундаментальных идей, лежащих в основе моей книги: вы можете легко преобразовывать колебания в биты и наоборот, перемещаться между аналоговым и цифровым мирами. Сама идея восходит к 1933 году, когда советский математик Владимир Котельников сформулировал ее в том виде, в каком мы ее знаем сегодня. Ее официальное название – теорема отсчетов или теорема выборки. Вся эта книга – биография пикселя, а *пиксель* – наше название единичного отсчета, выбранной точки визуального мира. Так что эта книга – о выборке. Пиксели – это невидимые биты, которые вопло-

цаются в видимые световые колебания. Я загорелся желанием написать эту книгу, чтобы вы осознали, какое в них скрыто волшебство, и удивились, как оно работает. Обещаю, никакой математики здесь тоже не потребуется.

После того как я трижды на двух страницах упомянул, что *математика нам не потребуется*, вы, возможно, подумаете: *а что, если кому-то математика все же интересна?* Для них – но на самом деле для всех моих читателей – я создал сайт с комментариями, расположенный по адресу alvyray.com/DigitalLight. Там вы найдете дополнительные сведения о людях, местах и событиях, которые сделали бы эту книгу слишком громоздкой, чтобы поместиться между физическими обложками. А еще на сайте размещены математические уравнения, описывающие магию Цифрового Света и пикселей и подтверждающие, что все это действительно возможно.

Распространено заблуждение, что пиксель – это просто маленький цветной квадратик. Но на самом деле пиксель – это глубокая абстрактная концепция, связывающая воедино весь наш современный медиамир. Это организующий принцип Цифрового Света.

Визуальная картина состоит из бесконечного количества цветных точек. Бесконечность по определению слишком велика, чтобы иметь с ней дело. Но как мы можем заменить непрерывную визуальную картину конечным числом дискретных битов – пикселей – и не потерять при этом беско-

нечное количество информации между ними? Теорема отсчетов подсказывает, как это сделать. Это секрет, который заставляет работать современный медиамир.

Теорема отсчетов, базирующаяся на преобразованиях Фурье, возникла почти одновременно с идеей компьютера в середине 1930-х. Они встретились и зачали ребенка, Цифровой Свет, предмет этой книги.

Вклады: две высокие технологии

Вторая часть книги посвящена истории двух высоких технологий, сформировавших Цифровой Свет: компьютерам и кинематографу. Как и в первой части, я доступно представлю каждую технологию и расскажу историю ее создания, попутно развенчав некоторые распространенные мифы. Подлинные истории всегда более интригующие, вдохновляющие и замысловатые, чем привычные мифы.

В царстве Цифрового Света мы можем *брать* пиксели реального мира – скажем, с камеры на Международной космической станции, отслеживающей последние ураганы. Но, что еще важнее для этой книги, мы также можем сами *создавать* пиксели. Тут без компьютеров не обойтись, поэтому я так подробно рассказываю о развитии этой высокой технологии.

В процессе работы над книгой я сделал для себя немало удивительных открытий, но главным из них стал тот факт, что первые пиксели появились уже на первых компьютерах.

Они родились вместе. Таким образом, выяснив, какие компьютеры были первыми в мире, мы также узнаем, когда и где появились первые пиксели. Вот почему глава о компьютерах во второй части называется «Восход Цифрового Света: ускорение». Она проиллюстрирована первым изображением, сделанным с помощью пикселей в 1947 году. Еще я расскажу там о законе Мура, движущей концепции огромной силы:

Все хорошее в компьютерах каждые пять лет становится лучше на порядок.

Несмотря на кажущуюся простоту, это заявление носит революционный характер. То, что в 1965 году, когда Гордон Мур сделал свое наблюдение, равнялось 1, сейчас составляет около 100 миллиардов, а к 2025 году достигнет 1 триллиона. Это взрыв сверхновой. Закон Мура – это динамо-машина невероятной мощности, стоящая на протяжении более 50 лет за каждым витком развития компьютеров, в том числе и Цифрового Света.

Цифровое кино – тоже часть Цифрового Света – происходит от классического кинематографа. В главе под названием «Фильмы и анимация: время отсчетов» рассматривается эта доцифровая технология создания движущихся изображений. Это также помогает проиллюстрировать саму идею дискретной выборки: знакомые нам «кадры» на дрожащей киноплёнке на самом деле являются набором отсчетов.

Глаголы *брать* и *создавать* применимы и к фильмам.

Классический фильм снимается камерой на реальных съемочных площадках. Классический анимационный фильм создается из рисунков нереального, несуществующего мира. Главная загадка обоих видов киноискусства – как и почему они вообще работают? Как последовательность неподвижных кадров передает одновременно движение и эмоции? Теорема отсчетов помогает по крайней мере объяснить, как устроено движение. Первые цифровые фильмы, такие как «История игрушек», – прямые наследники классических анимационных фильмов.

Восход и сияние Цифрового Света

История Цифрового Света слишком обширна, чтобы охватить ее в одной книге, поэтому нужно выбрать, на чем конкретно сосредоточиться. В этой книге я расскажу о Цифровом Свете от первых пикселей в середине XX века до первых цифровых фильмов в начале нового тысячелетия. Неудивительно, что я решил написать о конкретных технологиях, людях и событиях, знакомых мне по личному опыту. Я родился до появления компьютеров – и пикселей, – и моя карьера в основном связана с созданием первых цифровых фильмов. Пройденный мною путь поможет объяснить, как Цифровой Свет стал универсальным явлением нашей жизни, поскольку компьютерные игры и виртуальная реальность не так уж далеки от цифрового кино.

В трех главах третьей части рассказывается, что происходило с Цифровым Светом после его восхода (который описан в главе 4) и появления первых пикселей в середине XX века. Закон Мура 1965 года четко разделяет историю Цифрового Света на две эпохи: Эпоху 1, до закона Мура, и Эпоху 2 – после. Глава под названием «Образы грядущего» посвящена Эпохе 1. Две другие главы, «Оттенки смысла» и «Миллениум и кино», повествуют о масштабных изменениях, вызванных законом Мура в Эпоху 2.

Первая Эпоха была временем огромных, но ужасно медленных компьютеров. Немногие счастливики имели доступ к этим дорогостоящим монстрам. Этот период установил Центральную Догму компьютерной графики: воображаемый мир внутри компьютера описывается с помощью трехмерной евклидовой геометрии и ньютоновой физики. За ним наблюдает виртуальная камера, создающая проекцию своей точки обзора при помощи линейной перспективы Ренессанса для отображения на экране.

События Эпохи 2 я опишу примерно до 2000 года. Ее кульминацией стало появление на границе тысячелетий трех великих цифровых киностудий: Pixar, DreamWorks и Blue Sky. Их истории тесно переплетаются.

Я не думаю, что, прочитав эту книгу, вы сможете самостоятельно создать цифровое кино, но надеюсь, что поймете, как оно делается. Это примерно как уроки музыки в школе: освоив полный курс, вы вряд ли сочините сюиту для ви-

олончели в духе Баха, но научитесь понимать, как устроена музыка, и еще сильнее полюбите творчество Баха. Понимание, как создается современный цифровой фильм, например «История игрушек», может иметь тот же эффект.

Как говорить о высоких технологиях

Исследуя историю технологий в ходе работы над этой книгой, я наметил три глобальные темы.

Тема 1. Условия для прогресса: идея, хаос и тиран.

Для прогресса новой технологии необходимы свежая идея, разрушительный хаос, который создает потребность в идее и подстегивает ее развитие, и тиран или тирания, которые – часто неосознанно – защищают ее создателя или создателей, пока они воплощают идею.

Приведу один пример: у Жозефа Фурье возникла великолепная идея, что непрерывность – это музыка, то есть просто сумма волн разной амплитуды и разной длины. Хаос Французской революции привел его в Париж, а возвышение Наполеона обеспечило возможность заниматься наукой. Тиран Наполеон отправил Фурье в сельскую местность подальше от Парижа. В безопасном месте на протяжении долгих лет Фурье развил свою идею в волновую теорию, которая в итоге вернула его в Париж. Его идея повлияла на дальнейшее развитие науки и технологий, в том числе и Цифрового Света.

Тема 2. «Высокие» в выражении «высокие техноло-

гии» гарантирует, что их история не сводится к примитивному нарративу. Я неоднократно с ужасом обнаруживал, что почти всегда общепринятая история технологий полна ошибок. Дело не в отсутствии свидетельств того, как все обстояло на самом деле. Проблема, как мне кажется, заключается в нашей любви к простым историям, основанным на окончательном триумфе гениального творца после многочисленных испытаний и невзгод. Во многих университетах есть кафедры истории науки, но история технологий редко становится предметом научных исследований. В результате это направление захватывают страны, компании или частные лица, извлекающие выгоду из самовозвеличивания. Тираны склонны приписывать себе все достижения. В этой книге будет много таких примеров.

Чтобы не попасть в ловушку упрощенного повествования, я полагаюсь на генеалогию. Для истории каждой технологии я разработал семейное древо – графическую блок-схему для учета всех задействованных людей, мест, идей и машин. На ней сразу видно, кто, что и от кого получил (всеми правдами и неправдами) и как взаимодействовали участники процесса. Вряд ли при таком подходе найдется схема, где все происходит от одного человека. Ответвления одного древа переходят к другому, а затем к третьему. Мы наблюдаем, как они переплетаются, по-разному воздействуя на следующие поколения. Таким образом, каждая глава книги становится чем-то вроде расширенной подписи к блок-схеме,

дополненной подробными биографиями вовлеченных людей и доступным изложением их идей.

Тема 3. Технологии возникают в результате взаимодействия различных видов творчества. Две классические ошибки, которые допускают, излагая историю высоких технологий, заключаются в противопоставлении ученых и инженеров, а также технической изобретательности искусства. Я называю первое противопоставление битвой между *башней* (из слоновой кости) и (химической) *вонью*. Теория отличается от практики, но в первой творчества не больше, чем во второй. Это просто разные виды творчества. Цифровой Свет был бы невозможен без математической концепции – идеи компьютера с хранимой в памяти программой – и инженерного чуда – физического воплощения закона Мура. Столь же пагубно убеждение, что деятели искусства занимаются творчеством, а технические специалисты – нет, или наоборот. В истории технологий мы постоянно обнаруживаем, что к настоящим прорывам приводит именно взаимодействие между одинаково творческими учеными инженерами и художниками.

Давайте начнем наше почти двухвековое путешествие примерно с того момента, когда была написана знаменитая картина Жака-Луи Давида – но портрет Наполеона нам встретится гораздо менее лестный.

Основы: три великие идеи

1. Частоты Фурье: музыка мира

*В Академии наук восседал знаменитый Фурье,
теперь уже давно забытый потомством.
– Виктор Гюго. «Отверженные»*

Вы знаете, кто такой Фурье?

Ответ разделит нас на две категории. Те, кто скажут «да», вероятно работают в сфере науки или технологий. Вполне возможно, что они на практике используют его великую идею прямо сейчас. Те, кто занимается искусством или гуманитарными науками, скорее всего, никогда не слышали о нем. И все же его идея прекрасна, элегантна и всеобъемлюща. И она изменила наш мир.

Но даже те, кто ответил утвердительно, вероятно, ничего не знают о нем как о человеке. Так что Виктор Гюго был прав. Потомки *действительно* забыли Фурье.

Мало кто знает, например, что Жозеф Фурье чуть не лишился головы во время Французской революции. Или что Наполеон Бонапарт взял его с собой в Египетский поход для участия в экспедиции, обнаружившей Розеттский камень. Или что он был наставником Жана-Франсуа Шам-

польона, который расшифровал древнеегипетскую письменность. Или что он первым начал изучение парникового эффекта. Или что он защищал одну из первых женщин-математиков Софи Жермен, когда считалось, что женщинам не пристало заниматься науками.

Как я упоминал во введении, технологические прорывы часто происходят, когда в той или иной степени присутствуют следующие ингредиенты: великая научная идея, своеобразный хаос и один или два тирана.

Фурье сформулировал свою великую идею, находясь в полном хаосе. Его тираном был Наполеон, который сначала возвысил его, а затем отправил в провинцию. Возвышение подтолкнуло Фурье задуматься над великой идеей. Изгнание дало ему время, чтобы ее проработать.

Его идея зародилась из крошечного научного зерна, из размышлений о теории теплопроводности. За два последующих столетия наработки Фурье расцвели тысячами технологических решений. Его идея лежит и в основе концепции пикселя.

Всё на свете музыка

Великая идея Фурье заключается в следующем: весь мир — это музыка, все состоит из волн.

Это музыкальное озарение привело к появлению радио, что, пожалуй, неудивительно. Оно же привело и к появлению

телевидения. Фактически среди его многочисленных потомков – все медиатехнологии, все различные медиа, которые слились во время Великой цифровой конвергенции. Короче говоря, великая идея Фурье завоевала мир и породила все громы и молнии современных средств массовой информации.

Вообще, эта идея распространена гораздо шире и выходит далеко за пределы медиа. Едва ли найдется какая-либо отрасль науки и техники, не затронутая ею. Электричество и магнетизм, оптика, дифракция рентгеновских лучей, теория вероятностей, анализ землетрясений и квантовая механика... Список можно продолжать и продолжать. Не будет преувеличением сказать, что Фурье изменил наше понимание мира.

Имена Исаака Ньютона и Альберта Эйнштейна хорошо известны даже гуманитариям. Закон всемирного тяготения первого и теория относительности второго получили международное признание еще при их жизни. Но памяти о Фурье на протяжении последних 200 лет не давали угаснуть только физики и инженеры. Они знали о его заслугах и чествовали Фурье как отца-основателя почти всех современных технологий. Их достижения в различных отраслях демонстрировали величие и универсальность идеи Фурье о волновой природе мира.

Самому Фурье принадлежит только первый, но крайне важный шаг. Он первым сформулировал эту идею матема-

тически и проверил ее экспериментально. Хотя он посадил лишь семя теории, из которого взойдут тысячи решений во многих отраслях науки, сам же он взрастил только первый такой цветок – описание теплового потока в твердых телах.

Столь неромантическая специализация – веская причина для запоздалого признания. Он стал «знаменитым Фурье» из Академии наук благодаря своей теории теплопроводности. Звучит менее поэтично, чем идея Эйнштейна о том, что гравитация – это искривление пространства-времени.

И все же великая идея Фурье гораздо более фундаментальна для современного опыта, чем теории Эйнштейна. Она, констатирующая музыкальную природу мира, так же прекрасна, как и концепция искривления пространства-времени, а еще – более доступна для понимания. У нее нет причин прятаться под непроницаемым покровом высшей математики.

Пришло время изменить оценку, данную Виктором Гюго, и воздать должное как самому великому человеку, так и его великой идее. Вездесущая современная технология Цифрового Света – то, что нужно, чтобы наконец оценить по заслугам Жан-Батиста Жозефа Фурье.

Жажда бессмертия

Жан-Жозеф Фурье родился 21 марта 1768 года в семье портного, в древнем провинциальном городе Осер, располо-

женном примерно в ста милях к юго-востоку от Парижа. Ему не исполнилось и десяти лет, когда родители умерли, оставив сиротами пятнадцать своих детей. Во Франции витало предчувствие Революции, а на американском континенте уже год как существовала новая страна, и ее посол Бенджамин Франклин очаровал Париж енотовой шапкой и кокетливыми манерами.

Видимо, в сироте Фурье было что-то особенное, потому что добрые люди из Осера позаботились, чтобы талантливый ребенок получил хорошее образование. Его пристроили в школу, которой руководил Жозеф Палле, некогда обучавший музыке Жан-Жака Руссо. Увы, нет никаких свидетельств, обладал ли музыкальными талантами человек, открывший музыку мира.

Затем Фурье там же, в Осере, поступил в Королевскую военную школу (на всю Францию насчитывалось всего 11 отделений этой школы). В этом ему снова помогли местные жители. В военных школах упор делался на естествознание и математику. Фурье особенно – даже маниакально – увлекался математикой.

В 13 лет он собирал свечные огарки, чтобы после отбоя освещать шкаф-чулан, где до рассвета просиживал над математическими книгами. Душное и холодное убежище подорвало его здоровье на всю оставшуюся жизнь. Возможно, именно этот шкаф пробудил в нем особый интерес к проблеме теплопроводности.

Ночные самостоятельные занятия при свечах вскоре принесли плоды. Он получил школьную награду по математике, что стало началом его научной карьеры и в конечном итоге обессмертило его имя. Также он получил поощрение в области риторики, что подтолкнуло его к участию в политической жизни и заставило рано осознать свою смертность. Ораторские таланты чуть не погубили его прежде, чем успели развиться математические способности.

Сначала опасность не выглядела очевидной. Дальнейшее обучение в военной школе подразумевало армейскую карьеру, но Фурье так и не стал военным служащим. Он был слишком слаб здоровьем и увлечен математикой. Поэтому, завершив обучение, Фурье нашел прибежище в церкви. Он стал послушником в аббатстве Святого Бенедикта на Луаре и преподавал математику другим послушникам. Тогда же он принял церковное имя Жан-Батист, которое использовал и в дальнейшем.

Фурье удалился в монастырь накануне Французской революции. Несколько сохранившихся писем показывают, что он смутно осознавал происходящее и в целом оставался к нему равнодушен. Гораздо сильнее Фурье беспокоился о своей будущей славе и недавно законченном сочинении по алгебре. «Вчера мне исполнился 21 год, – с горечью писал он в марте 1789 года. – В этом возрасте у Ньютона уже были претензии на бессмертие».

В сентябре он пишет еще одно письмо, где оплакива-

ет судьбу своего алгебраического сочинения. Между двумя этими письмами началась Великая французская революция. Но в сентябрьском письме нет никаких упоминаний о ее бурных событиях.

Тем не менее после этого личный мир Фурье начал меняться. В декабре он представил перед Академией наук в Париже доклад об «алгебраических уравнениях» – вероятно, то самое сочинение, о судьбе которого он так сильно беспокоился.

Он покинул аббатство, так и не принеся обетов. Впрочем, вскоре революционное правительство вообще подавило монашеские ордена.

И все же следующие три года Фурье не проявлял революционного пыла. Вместо этого он преподавал математику в Осере. Он даже не подписал петицию революционного Народного общества Осера к Национальному конвенту в Париже с требованием суда над королем Людовиком XVI.

Однако в начале 1793 года, всего через месяц после казни монарха, мы уже слышим голос Гражданина Фурье.

*Блаженством было быть живым к тому рассвету,
Но молодым быть было настоящим раем.*

– Уильям Вордсворт. «Прелюдия» (пер. Т. Становой)

Заря Французской революции, как известно, привела Вордсворта в восторг, и молодой Фурье, хотя и принял ее

запоздало, испытывал похожие чувства. Свои ощущения он выразил менее искусно, чем поэт: «Можно представить себе ту возвышенную надежду, которая появилась у нас на установление правительства, свободного от королей и попов». Но страсть его была столь же сильна: «Я немедленно влюбился в это дело, по моему мнению, величайшее и прекраснейшее из всех, за которые бралась какая-либо нация».

Фурье быстро перешел от восторженных слов к непосредственному участию в политике. В феврале 1793 года он выступил с пламенной дебютной речью перед революционной коммуной в Осере, предложив план по набору местных рекрутов для армии Республики. Народное общество поддержало идею Фурье и пригласило его присоединиться к Комитету революционного надзора. Пламя Террора разгоралось все сильнее: десятки тысяч врагов государства расстались с жизнью на гильотине. Фурье благоразумно принял «приглашение».

Но наивный Фурье – совсем новичок – сразу совершил ошибку, поскольку выбрал максимально неудачное время для прихода в политику. Его блестящие способности к риторике вскоре привели к серьезным неприятностям. Он неблагоразумно использовал свое красноречие, чтобы спасти от казни трех жителей Орлеана. Неблагоразумие заключалось в том, что их включил в список своих врагов Робеспьер, управлявший машиной Террора.

Революционеры тут же освободили Фурье от всех полно-

мочий за пределами Осера. Разочарованный, что не смог послужить делу Республики, он отправился в Париж и добился встречи с самим Робеспьером, чтобы оправдаться. Смелый поступок привел к обратному результату. Попытки помочь орлеанским узникам обеспечили ему место в списке главных врагов Робеспьера. В соответствии с извращенной логикой Революции и несмотря на протесты поддерживавших его граждан Осера, Фурье стал жертвой того самого Террора, которому пытался служить. 17 июля 1794 года его арестовали и бросили в тюрьму. Фактически это означало смертный приговор.

«Я испытал все возможные виды преследований и неудач, – писал он. – Никто из моих противников не подвергся большей опасности, и я единственным из наших соотечественников оказался обречен на неминуемую смерть».

Следующей остановкой, всего через несколько дней, должен был стать Революционный трибунал в Париже, который без особых разбирательств отправил бы Фурье на гильотину. У него имелись веские причины испытывать страх. Он не мог знать, что всего через десять дней – 27 июля, или 9 термидора (по французскому революционному календарю) – Робеспьер падет. Тот, кто требовал больше отрубленных голов и не довольствовался никаким результатом (снова цитируя Вордсворта), сам оказался на гильотине. К счастью для будущего науки и, в частности, для пикселя, отрубленная голова Робеспьера спасла голову Фурье.

Волна

Можно ли было в работе по алгебре 1789 года – той самой, что отвлекла внимание Фурье от Революции, – усмотреть черты будущего великого ученого? Содержались ли в ней предпосылки его великой идеи? Несомненно, работая над ней, он отточил свои математические навыки и достиг, как это называют специалисты, «математической зрелости». Но, к сожалению, о ней практически ничего не известно.

Также неизвестно, когда Фурье впервые использовал концепцию *волны*, фундаментальную форму, лежащую в основе его великой идеи. Мы знаем лишь, что в 1807 году он изложил ее в работе «О распространении тепла в твердом теле». Волну можно получить, преобразовав идеальную окружность, так что это революционная форма. И она элегантна в своей простоте. Так что у пикселя благородное происхождение.

Чтобы получить наглядное представление о волнах Фурье, давайте начнем с окружности (рис. 1.1). Нам поможет старомодный циферблат аналоговых часов. Кончик секундной стрелки раз за разом пробегает по окружности, отсчитывая одну минуту за другой. Нижнее изображение отличается от верхнего на три секунды.

Большая точка вычерчивает волну. Здесь неплохо бы поместить анимированную картинку, но, поскольку в книге это

невозможно, просто представьте, что с течением времени точка движется вправо, как показано стрелкой на оси. Каждому делению на циферблате соответствует аналогичная отметка на оси времени. Теперь представьте, что большая точка связана с кончиком секундной стрелки эластичной линией. С течением времени точка смещается вправо, а проделанный ей путь и есть волна.

Здесь важно понять, как выглядит волна и насколько тесно она связана с равномерным движением по окружности. Детали этой тесной связи не так важны, как само интуитивное понимание, но еще несколько подробностей помогут лучше уяснить и запомнить все это.

Рассмотрим осевую линию на циферблате – линию, соединяющую отметки на 9 часов и 3 часа. Большая точка всегда отмечает текущую высоту кончика секундной стрелки над или под этой линией. В момент, изображенный на верхней иллюстрации (он выбран произвольно), большая точка преодолела уже двадцать три позиции, потому что с начала фиксации прошло двадцать три секунды. С очередным движением секундной стрелки большая точка переместится в следующую позицию на волне. А еще через две секунды мы получим нижнюю иллюстрацию. Так что по мере того, как секундная стрелка снова и снова обегает по кругу циферблат, ее кончик – а точнее, прикрепленная к нему большая точка – движется по волнистой траектории вверх и вниз, вверх и вниз...

Секундная стрелка делает полный оборот за минуту, поэтому волна, нарисованная большой точкой, бесконечно движется вправо. Так же бесконечно она простирается влево. Волна на рисунке, по-видимому, начинается ровно в 12:01 – тоже совершенно случайный выбор, – но подразумевается, что часы вели отсчет времени и раньше, поэтому рисовать волну влево можно, насколько хватит терпения.

Волна на рисунке – это одна из волн Фурье. Сами волны – не его изобретение, но его идея лежит в основе их использования. Эти волны – элементы его музыки. Математики называют такую особенно изящную волну *синусоидальной*. Поскольку это единственный вид волн, который нам нужен, далее я буду называть его просто *волной*.

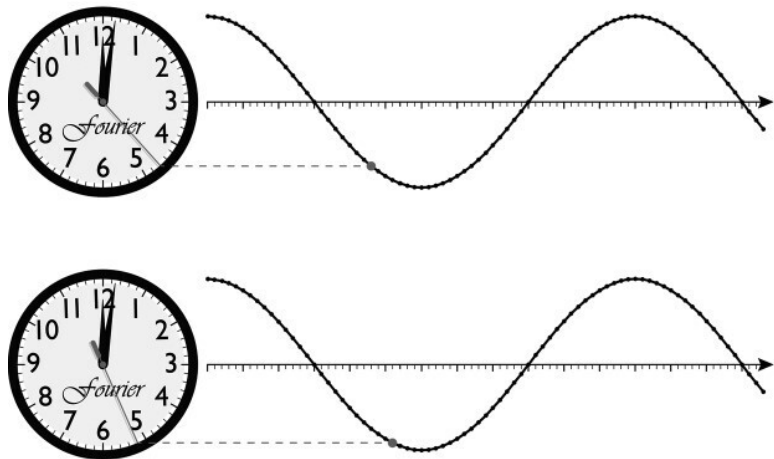


Рис. 1.1

Все, что касается волн Фурье, очень просто, красиво, изящно... идеально. У ученых и инженеров есть официальный термин для систем уравнений, которые Фурье использовал для описания теплового потока в твердом теле, применимый также для его великой музыкальной идеи вообще. Они описывают это как *гармонию* или «систему *гармонических уравнений*».

Волны окружают нас всегда и везде. Напряжение электрического тока в любой розетке нашего дома или офиса описывается волной. Из-за этого он даже называется переменным током. Обычно он создается при помощи ротора, вра-

щающегося в постоянном магнитном поле, например на гидроэлектростанции, где ротор приводится в действие потоком воды на плотине. Вращение ротора преобразуется в волну – в переменный ток. В электрическом моторе происходит обратный процесс: волнообразный переменный ток поступает на клеммы электродвигателя, который снова преобразует его во вращательное механическое движение. Так, электрический вентилятор, получив волну изнутри, превращает ее во вращение лопастей снаружи.

Еще одну хорошо знакомую синусоидальную волну можно найти в мире средств массовой информации. Это цифры в названии вашей любимой FM-радиостанции. Мне нравится слушать KCSM Jazz 91,1 выходящую в эфир из Сан-Франциско. Цифра 91,1 обозначает, какая волна выделена для вещания этой радиостанции. Они описывают электромагнитную волну, которую станция использует, чтобы донести свою музыку до радиослушателей.

Хотя все волны Фурье имеют одинаковую форму, они отличаются двумя характеристиками – насколько быстро (это называется *частотой*) и насколько сильно (это называется *амплитудой*) происходят колебания. Вернемся к рисунку с часами. Как часто расположены гребни волны, оставленные секундной стрелкой? Она делает один оборот в минуту, так что собственная частота этой волны – один полный волновой цикл в минуту. *Цикл* – правильное слово. По мере того как секундная стрелка делает полный оборот по циферблату,

красная точка, прикрепленная к ее кончику, нарисует полный цикл волны на шкале времени. За один полный оборот получается один волновой цикл.

Кончик минутной стрелки изобразит такую же кривую, но более медленно. Волна минутной стрелки вздымается только один раз в час. Ее частота – один цикл в час, что в шестьдесят раз медленнее, чем у секундной стрелки. Третья волна – волна часовой стрелки. Она имеет самую низкую частоту из трех – один цикл за 12 часов.

Цифра в названии радиостанции KCSM Jazz 91,1 – частота (в миллионах циклов в секунду) радиоволны, которую использует эта станция. А к каждой электрической розетке подведен переменный ток с частотой волны 60 (в США) или 50 (в России и большинстве стран Европы) циклов в секунду.

Волны от секундной, минутной и часовой стрелок отличаются не только частотой, но и амплитудой. Я нарисовал минутную стрелку чуть короче, чем секундную, поэтому гребни ее волн будут немного ниже. Поскольку максимальная высота гребня волны равна ее амплитуде, амплитуда волн минутной стрелки ниже, чем у волн секундной. Часовая стрелка еще короче, поэтому амплитуда ее волны – самая низкая из трех.

Для теории Фурье волна может иметь любую частоту и любую амплитуду, если это синусоидальная волна – развертка окружности. На примере часов мы рассмотрели со-

здание трех таких волн, а рисунок 1.2 показывает еще три изящных по форме синусоидальных волны, отличающихся друг от друга только количеством колебаний и высотой, то есть частотой и амплитудой. Все они имеют одинаковую форму точно так же, например, как и все треугольники. Фигура, чтобы мы назвали ее треугольником, должна иметь три стороны, а волне, чтобы называться волной, достаточно быть разверткой окружности.

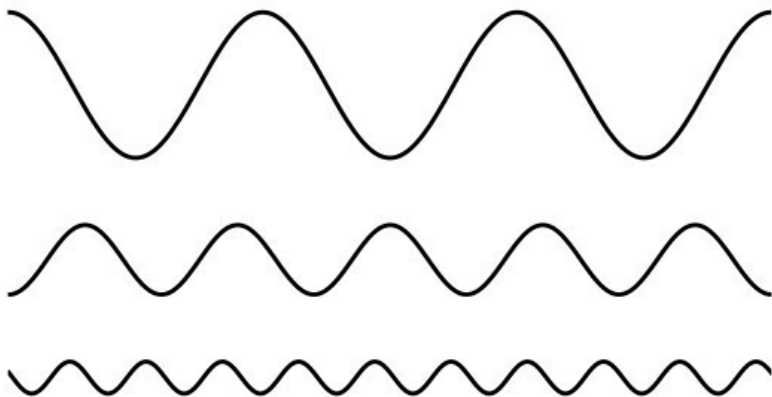


Рис. 1.2

Отметим еще одну особенность волн на этом рисунке: по левому краю изображения выровнены разные точки их цикла. Верхняя волна начинается с пика, средняя – с максимального спада, а нижняя – с точки между ними. Если

вы сдвинете любую из них влево или вправо, ее частота и амплитуда останутся прежними, но изменится положение относительно других волн. Это важно, потому что для вычислений Фурье нам придется складывать волны. Мы получим разные результаты, если волны будут выровнены по-разному.

Для описания положения волны мы используем слово *фаза*. Фазы луны отлично описывают, на каком этапе цикла находится луна: полнолуние или новолуние, растущая или убывающая луна между ними. Волна циклична, поэтому у нее тоже есть фазы. На левом краю рисунка 1.2 верхняя волна находится в фазе полнолуния, а средняя – новолуния. Нижняя же волна только начинает убывать. Изменение начальной фазы сдвигает всю волну влево или вправо. Но обратите внимание, что если вы переместите ее на полный цикл, то снова получите исходную волну. Их невозможно будет отличить друг от друга. Таким образом, указания одного места в одном цикле – то есть значения фазы – достаточно, чтобы указать положение всей волны. Для целей Фурье волна может находиться в любой фазе.

Теперь мы можем осознать значимость замечательной идеи Фурье: большую часть информации об окружающем мире – включая все, что мы можем видеть или слышать, а также многое другое – можно описать как сумму таких волн, и *больше ничего*. Частоты Фурье – это частоты волн из такого описания. Их гармония – это музыка мира. Эта

идея поражает масштабностью и противоречит нашей бытовой интуиции, поэтому ее сложно понять и принять. Давайте начнем с музыки – знакомой физической реальности, которая поможет доступнее раскрыть глубочайшую идею Фурье.

Звуки

Музыка состоит из волн разных частот – и только из них. Конечно же, их называют звуковыми волнами. Струны скрипки вибрируют с разной частотой; то же самое происходит и с фортепиано. По сравнению с неторопливой секундной стрелкой, вращающейся с частотой один цикл в минуту, любая нота на фортепиано – звуковая волна демонической скорости от колебания струны, вибрирующей с частотой 262 цикла в секунду. Кларнет или флейта звучат на определенных частотах, как и каждая из труб органа. Лирико-колоратурное сопрано поет на более высокой частоте, чем альт, и гораздо выше, чем баритон или бас. Мы говорим, что сопрано поет *выше*, а не *на большей частоте*, только из-за особенностей восприятия музыки нашим мозгом. Физика создания звука здесь точно такая же. Аккорд – это, по сути, несколько волн – скажем, три или четыре, – воспроизведенных одновременно или, как мы говорим, сложенных вместе. Хор состоит из множества голосов разной высоты, а оркестр – из множества инструментов с разной частотой, от контрабаса до флейты-пикколо.

Нарастание громкости от пианиссимо до фортиссимо отражает амплитуду звуковых волн. Чем выше амплитуда, тем громче звук. Массивная труба органа – с педалью, выжатой до пола, – сотрясает собор ужасом гласа Господня. Сильнее ударьте по клавише пианино или увеличьте громкость радио, и амплитуда звуковых волн возрастет. Неудивительно, что именно усилитель – это важнейший компонент радио или стереосистемы.

Идея Фурье кажется естественной, когда вы описываете музыку, но сила этой идеи полностью осознается, только если понять, что из звуковых волн состоят все звуки, а не только музыка. Имеется в виду вообще все, что мы слышим, от низкочастотного грохота до пронзительного свиста. И даже больше – ведь, как известно, собаки слышат более высокие частоты, чем мы. Для нас главное в великой идее Фурье заключается в том, что любой звук состоит из звуковых волн различных частот, которые складываются друг с другом, а потом интерпретируются нашими ушами и мозгом как «Весна священная» Стравинского, как голос любимого ребенка или шум строительной площадки.

На рисунке 1.3 в виде волн Фурье с различной частотой и амплитудой изображено слово «yes» (ось времени направлена вправо). Часть «у» содержит самые низкие частоты и самые высокие амплитуды – это ударная часть слова. Для части «е» в середине характерны самые низкие амплитуды и смешанные частоты. А шипение «s» отличается низкими ампли-

тудами и самыми высокими частотами.

Звуковые волны на самом деле состоят из ритмичных сжатий воздуха или, иначе говоря, волн давления. Возьмем для примера низкочастотный динамик в вашей акустической системе – вы сразу ощутите его вибрацию на громких басовых тонах. Легко вообразить, как его быстро движущаяся мембрана сотрясает воздух перед собой. Пульсации распространяются от поверхности низкочастотного динамика, так сказать, подталкиваются им. Более громкий звук соответствует более сильной вибрации и – соответственно – более интенсивному воздействию на воздух.

Мы можем непосредственно ощутить эти волны давления. Представьте лоурайдер, который медленно едет по бульвару Креншоу в Лос-Анджелесе, а от музыки из его мощного бумбокса содрогаются оконные стекла ближайших домов.

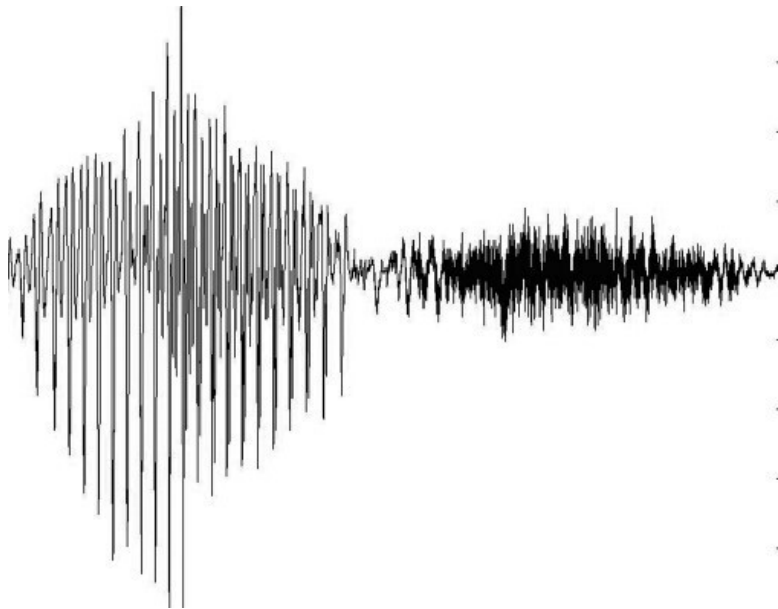


Рис. 1.3

Очень громкая низкочастотная звуковая волна, сталкиваясь с препятствием, преобразует волны давления в физические вибрации, как будто трясется сама земля. Но на самом деле эти сотрясающие землю волны точно такие же, как и те, что проникают нам в уши и заставляют наши барабанные перепонки вибрировать в унисон с низкочастотным динамиком, бумбоксом или басовой трубой органа. Затем хитроумная система из маленьких косточек – с восхитительными названиями «молоточек», «наковальня» и «стремечко» – пе-

редает эти вибрации во внутреннее ухо, где тысячи крошечных волосковых клеток реагируют на определенные частоты. Они передают информацию о частоте вибрации напрямую в мозг.

Нормальный человеческий слух может различать все частоты от 20 до 20 000 циклов в секунду. В научной литературе принято обозначать «циклы в секунду» наименованием «герц» (сокращенно Гц), но я – для наглядности – буду использовать более длинную фразу. Есть и другие звуки, недоступные человеческому уху, например ультразвуковой свист, который собака слышит, а мы нет.

Но что представляют собой те волны, которые мы воспринимаем зрением, – те, что приведут нас к пикселям? На каких частотах вибрирует зрение?

Наполеон Бонапарт

Через год с небольшим после рождения Фурье на острове Корсика, расположенном на одной воображаемой линии с Парижем и Осером, но примерно в ста милях к юго-востоку от материковой Франции, родился Наболион Буонапарте. Корсика стала французской в промежутке между появлением на свет двух этих мальчиков, так что Буонапарте едва ли считался французом. Его имя обрело знакомое нам звучание гораздо позже, когда ему было уже за двадцать и он решил назваться на французский лад, превратившись в Наполеона

Бонапарта.

Бонапарт учился в Королевской военной школе в Бриен-ле-Шато. Точно такую же посещал Фурье в Осере примерно на 60 миль южнее. Таким образом, Бонапарт получил, в сущности, ту же подготовку в области естественных и математических наук, что и Фурье. Полученных знаний хватило, чтобы пробудить у Бонапарта неизменный интерес к математике. С математиками, не только с Фурье, он общался на протяжении всей жизни. В геометрии даже есть теорема Наполеона, названная в его честь.

Бонапарт, выбрав карьеру офицера, продолжил образование в элитной военной школе в Париже. Подробности обучения нас не касаются, но интересно взглянуть на результаты его выпускных экзаменов. Экзаменатор охарактеризовал Бонапарта как человека с «исключительными познаниями в математике». Этим экзаменатором был Пьер-Симон Лаплас, которого иногда называли французским Исааком Ньютоном.

Бонапарт впоследствии сделал нечто, поражающее воображение современного американца: он назначил Лапласа членом французского сената. Известный физик и математик – в кресле сенатора!

Встреча Фурье с Бонапартом

После падения Робеспьера революционное французское

правительство не только выпустило Фурье из тюрьмы, но и предоставило ему престижную должность профессора недавно созданной Политехнической школы в Париже – сейчас это что-то вроде Массачусетского и Калифорнийского технологических институтов, вместе взятых. Наконец-то он попал на самую вершину: Фурье преподавал математику в Париже и общался с корифеями науки, такими как Лаплас. Это позволило привлечь внимание амбициозного Бонапарта, который искал ученых мужей, готовых сопровождать его в Египетском походе. Экспедиция обещала быть жаркой – как в климатическом, так и в политическом отношении.

Бонапарт недавно покорил Италию, разгромив австрийскую армию, и вернулся в Париж триумфатором. Его популярность в народе и авторитет среди военных настораживали французское правительство. Так что в 1798 году оно с радостью отправило его (а особенно его армию) в Египет для новых завоеваний. Именно там Фурье и Бонапарт окончательно сблизились.

Подражая своему кумиру Александру Македонскому, Бонапарт взял с собой целую плеяду французских интеллектуалов (своих ученых мужей), в том числе молодого профессора Фурье из Политехнической школы. Обратите внимание на разительный контраст с нашим временем. Можете ли вы представить, что вместе с американскими войсками в Ираке или Афганистане высадятся известные математики и археологи?

Египетская экспедиция обернулась военным провалом, но принесла ценные плоды в интеллектуальном плане. Самым известным ее событием стало открытие Розеттского камня, что фактически породило всю последующую египтологию. Бонапарт основал Институт Египта и занял пост его вице-президента. Фурье вскоре был избран на должность постоянного секретаря этого учреждения. Он внес свой вклад в научные достижения египетской кампании, работая в течение десяти лет над массивным (двадцать с лишним томов) сборником «Описание Египта». В предисловии Фурье не скупился на чрезмерные похвалы Бонапарту. Наполеон и сам внес в первое издание немало правок, пытаясь вырвать интеллектуальную победу из пасти военного поражения.

Сначала французы одержали несколько побед: в сражениях у Александрии, Каира и пирамид, – но затем адмирал Нельсон уничтожил французский флот в Абукирском заливе. Несмотря на британский контроль над Средиземным морем, через год Бонапарту удалось прорваться во Францию, оставив в Египте армию, ученых мужей и множество незавершенных дел.

Он решился на стремительный отъезд, чтобы установить контроль над Францией. В самом конце XVIII века Бонапарт стал первым консулом нового правительства, сделав значительный шаг на пути к титулу императора.

Ученые мужи тоже попытались вернуться во Францию, но им повезло гораздо меньше. Британцы пропустили их че-

рез морскую блокаду, но забрали себе Розеттский камень. Он до сих пор остается одним из самых ценных сокровищ Британского музея.

Бонапарт, поспешно и, можно даже сказать, предательски покинув Египет, оставил генерала Жан-Батиста Клебера в затруднительном положении из-за полной военной неразберихи. Бонапарт назначил его командующим египетской армией и сообщил об этом письмом, чтобы не получить отказ. Клебер, полагая, что вынужден разгрести чужие ошибки, после такой уловки относился к Бонапарту с презрением.

Тем временем Фурье совершил вторую крупную политическую ошибку. Он слишком сблизился с несчастным генералом. Клебер назначил его директором бюро французской колониальной администрации в Египте. Вскоре генерал был убит, а Фурье выступил на его похоронах с пламенной речью. Искусный, но беспокойный язык снова навлек на него неприятности: в прошлый раз Фурье оскорбил Робеспьера, теперь – Бонапарта.

Бонапарту не хотелось, чтобы Фурье проповедовал позицию Клебера в столице и Франция узнала бы о не слишком благородных подробностях египетской кампании. Фурье рассчитывал по возвращении из Египта снова получить престижную должность в Париже, в центре интеллектуальной жизни. Вместо этого Бонапарт сослал слишком красноречивого ученого в Гренобль.

Свое решение он обставил довольно издевательски, «по-

просив» Фурье занять пост префекта департамента Изер, управляемого из Гренобля. Другими словами, Бонапарт «попросил» его возглавить провинцию, которая располагалась ближе к Корсике, чем к Парижу, – вдали от активной политической, светской и научной жизни.

Фурье согласился. Не стоило спорить с Бонапартом, ставшим самым могущественным человеком во Франции. Однако новая должность означала *изгнание*, и Фурье воспринимал это именно так. На протяжении десяти лет после Египетского похода он оставался единственным крупным французским математиком и физиком, работавшим не в Париже.

Зрение

Возможно, вы готовы признать, что все воспринимаемое на слух – это сумма волн, но вряд ли вы думаете, что точно так же дело обстоит и со зрением. Этот следующий шаг потребует немного больше объяснений. Великая идея Фурье заключается в том, что видимый мир, как и музыка, складывается из суммы волн. Но в случае со зрением эти волны пространственные. Они двумерны. Чтобы их увидеть, нам потребуется немного практики, но, как только вы научитесь их находить, никаких трудностей больше не возникнет. Мы выработаем такой навык, а затем совершим мысленный скачок, который когда-то сделал Фурье.

Волна секундной стрелки (рис. 1.1) на самом деле изоб-

ражает пространственную волну. Она *представляет собой* волну времени, движущуюся по оси времени, но на самом деле я изобразил пространственную волну, простирающуюся влево и вправо. Великая идея Фурье охватывает и пространство, и время. Вид волны зависит от физического процесса. Если что-либо движется во времени, подобно звуку, свету или волне от секундной стрелки, тогда это волны времени, а их частоты – это циклы в секунду. *Изображение* волны от секундной стрелки представляет собой пространственную волну, и ее частота выражается в циклах на дюйм, примерно один цикл на три дюйма (7,5 см), как показано на рисунке. Если бы я изобразил волну от минутной стрелки в том же масштабе, ее частота была бы в 60 раз меньше, или примерно один цикл на 180 дюймов (4,75 м). У пространственной волны часовой стрелки будет примерно один цикл на 2160 дюймов (5,49 км), в двенадцать раз меньше, чем у минутной.

Волны, которые я называю волнами зрения, не следует путать со световыми волнами. Световая волна – это механизм возбуждения палочек и колбочек в сетчатке наших глаз, позволяющий нам видеть. Это волна, которая изменяется во времени на чрезвычайно высоких частотах – около 500 триллионов циклов в секунду. Итак, световые волны – это средство, помогающее видеть, а волны зрения – это то, что мы видим. Световые волны меняются во времени, волны зрения – в пространстве.

Доказательства существования видимых пространственных волн – повсюду. Присмотритесь к этой странице. Буквы, включая пробелы, кажутся более или менее равномерно размещенными по горизонтали. Говоря *языком частоты*, они расположены на странице построчно с более или менее постоянной частотой по горизонтали, а строки текста размещены со строго определенной постоянной частотой по вертикали. Вы можете думать о тексте как о гребнях волны, а о междустрочном пространстве – как о впадинах между ними. Книжки на полках стоят с определенной регулярностью по горизонтали. А сами полки повторяются с достаточно предсказуемой частотой по вертикали. Ни в одном из этих примеров нам не встретились красивые плавные волны Фурье, но все они намекают на понятие пространственных волн в поле зрения.

На самом деле если вы можете увидеть некую «регулярность» в своем визуальном мире, то ее версия по Фурье будет представлять собой волну этой частоты. Я только что измерил расстояние между двумя строками текста в книге, которую я читаю, и оно составляет четверть дюйма (6,4 мм). Таким образом, музыкальная версия этой страницы, представляющей собой, если подумать, картинку, должна иметь пространственную волну Фурье той же частоты, четыре цикла на дюйм.

Потолочные балки или доски деревянного пола повторяются с определенной ритмичностью. Если пол вымощен

плиткой, она размещена с одинаковой частотой в двух измерениях, как и черепица, покрывающая крышу. Дворцовый комплекс в Альгамбре (рис. 1.4) доводит идею ритмики плитки, покрывающей полы, стены и потолки, до ошеломительных высот визуального наслаждения.

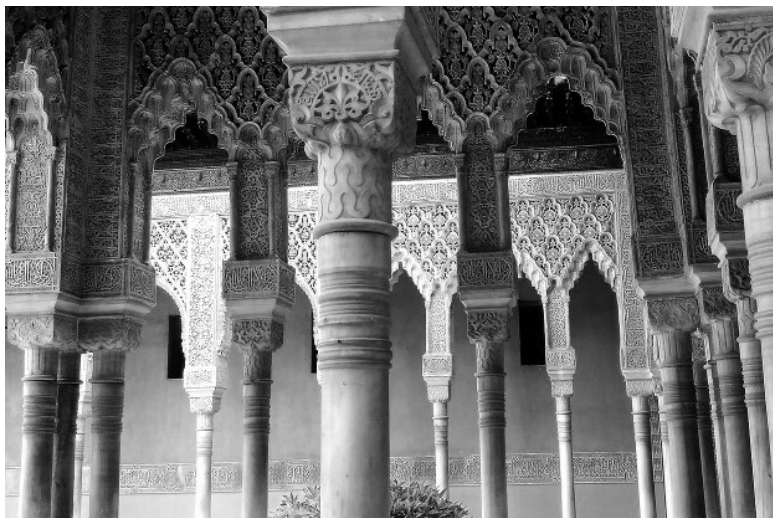


Рис. 1.4

Суть в том, что вы можете представить все эти пространственные ритмы с помощью только волн Фурье. Все визуальные паттерны, какими бы нерегулярными они ни казались, можно описать как комбинации, суммы изящных постоянных волн.

Но как насчет мира природы? Тот же принцип применим и здесь, хотя и не всегда очевиден, как в случае с океанскими волнами. Травинки на поляне или на лугу повторяются с характерной частотой. То же самое наблюдается и у листьев на дереве, хотя расстояние между ними зависит от разновидности растения. Расстояние между деревьями в лесу тоже имеет характерную частоту, зависящую от их вида. В расположении горных хребтов тоже можно отметить частоты. Регулярность, которую мы наблюдаем у матери-природы, гораздо менее однородна, чем у того, что создано нашими руками. В ее повторяющихся паттернах гораздо сильнее выражена случайность. Тем не менее горные пики не бывают, скажем, с двумя гребнями на дюйм или с двумя гребнями на миллион миль. Существует определенный диапазон частот, который более или менее соответствует тому, чего мы ожидаем от горных хребтов, – примерно два пика на 10 миль (16,09 км). Опять же, все эти визуальные ритмы пляшут под дудку Фурье.

Цель рисунка 1.5 – показать вам, как искать пространственные частоты в окружающем мире, как взглянуть на него альтернативным способом. На фотографии запечатлены растения-суккуленты из моего сада в Беркли, штат Калифорния. В нем повсюду присутствуют пространственные частоты. Как только вы научитесь их видеть здесь, а потом и где угодно, вы без труда совершите мысленный скачок, который сделал Фурье, и осознаете, что только волны и их частоты –

всё, что нужно для полного описания визуальной сцены.

Обратите внимание на терракотовые горшки – рукотворные компоненты этой сцены. Они расположены в узлах не очень ровной сетки. Они расставлены не *равномерно*, но есть примерная схема повторения – скажем, один горшок через каждый дюйм или около того. В интерпретации Фурье на этой части картины есть группа волн с небольшими отклонениями от основной частоты, чем и объясняются нарушения строгой закономерности.

Узор на горшках тоже повторяющийся. Рассмотрим на рисунке линию **a**, проходящую через горшки и обозначенную нижней парой стрелок. Сосредоточьте внимание на регулярных частотах вдоль одной линии, как будто интенсивность света вдоль нее – это амплитуда звука в музыкальном фрагменте. Можете ли вы представить себе слово «yes», произнесенное с разной интенсивностью света вдоль воображаемой линии, проведенной в моем саду?

Начиная слева по линии **a**, мы обнаружим среднюю частоту спиралевидных канавок на горшке, затем высокочастотную (но с низкой амплитудой) грязь между горшками, потом среднюю частоту канавок на втором горшке, после этого низкую частоту волны, определяющей кривизну самого большого горшка, затем две чуть более высокие частоты для двух других горшков и так далее.

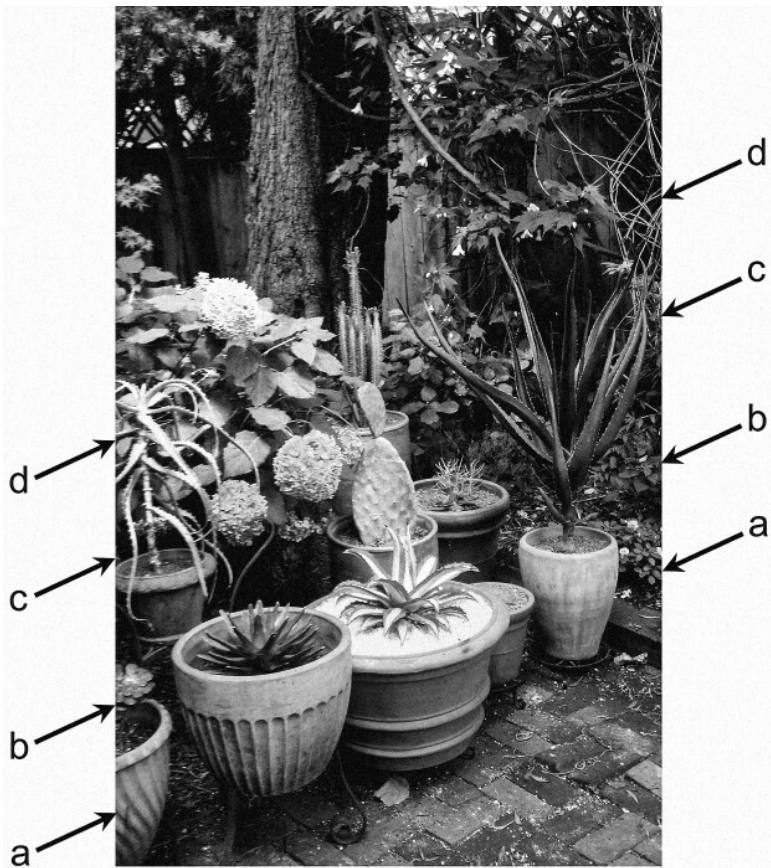


Рис. 1.5

У растений тоже есть частоты. Частота размещения ветвей или листьев у разных видов кактусов и суккулентов до-

вольно сильно варьируется. Чтобы убедиться в этом, обратите внимание на постоянные частоты вдоль линии **b**. Она проходит через изображения двух звездообразных кактусов. Она пересекает «листья» каждого из них с почти постоянной частотой (напомню, колючки кактуса – это на самом деле его листья, а то, что мы обычно принимаем за листья, – это его ветки).

Линия **c** пересекает большие шары соцветий гортензии, каждое из которых состоит из сотен крошечных цветков. Они пересекают линию с большей частотой, чем любое другое из ранее упомянутых растений. Линия **d** проходит через листья гортензии. На этой линии они встречаются с меньшей частотой, чем цветки на линии **c**. То есть на одном и том же промежутке умещается примерно два листа или десятки цветков. Цветы расположены плотнее, чем листья, или, иначе говоря, с более высокой пространственной частотой.

Четыре линии на рисунке проведены параллельно друг другу, но Фурье этого не требует. Вы можете включить интуицию и отыскать повторяющиеся узоры вдоль линий, проведенных под другими углами и даже перпендикулярно тем, которые обозначил я. Например, на большом плоском овальном «листе» кактуса опунции в центре фотографии вы, вероятно, заметили правильную структуру бугорков, где расположены его шипы. Вы можете нарисовать через них две волны примерно перпендикулярно друг к другу. Это как раз

и предполагает идея Фурье для двумерных изображений.

Вернемся к изображенным на фотографии рукотворным предметам: при взгляде на выложенный кирпичом внутренний дворик с любой стороны обнаруживаются повторяющиеся частоты вдоль и поперек. Почти незаметный забор на заднем плане тоже имеет определенную частоту повторения досок, как и решетка над ним.

В таком же духе можно проанализировать все, что изображено на фотографии. Линия, проходящая через изображение дерева с морщинистой корой, из-за ее шероховатости создаст волну с высокочастотной детализацией. Мелкий гравий в горшках подразумевает очень высокую пространственную частоту, и так далее. Сад – это симфония пространственной музыки.

Согласно Фурье *всё*, что мы видим, – визуальный мир, спроецированный на нашу сетчатку, вне зависимости от наличия или отсутствия повторяющихся паттернов, – это симфония пространственной музыки. Его можно представить в виде двумерных пространственных волн разных частот и амплитуд. Это все музыка. Это работает как музыка, но в двух измерениях – для наших глаз, а не в одном – для наших ушей. Нам понадобится это интуитивное понимание волновой природы видимого мира, чтобы в следующей главе разобраться, как устроены пиксели.

Розеттский камень

Жан-Франсуа Шампольон жил в Гренобле, где Фурье по «просьбе» Бонапарта занимал пост префекта. Фурье познакомил юного Шампольона с Розеттским камнем, в верхней трети которого находились таинственные древнеегипетские иероглифы. В течение следующих двух десятилетий Шампольон расшифровал их, опираясь на древнегреческий текст в нижней части камня.

Успешному результату поспособствовали особые отношения Фурье с первым консулом. Неоднократно Шампольон пытался забрать в армию, но каждый раз Фурье обращался за помощью к главному ценителю египетских древностей – Наполеону Бонапарту. Таким образом, освобожденный от военной службы Шампольон расшифровал надписи на Розеттском камне и заложил основы египтологии.

Великую идею Фурье, *что мир есть музыка, а всё вокруг суть волны*, можно назвать Розеттским камнем науки, а Фурье – ее Шампольоном. Сегодня ученые, инженеры и технологи говорят на языке частот Фурье. Это универсальный язык звука, изображения, видео и так далее. Фурье показал, как переводить с языка частот на обычные языки – например, цветов в пространстве или звуковых амплитуд во времени – и наоборот.

Возможно, вы слышали, как кто-нибудь в непринужден-

ной беседе говорит: «Мне недостаточно полосы пропускания». Если вы разбираетесь в технике, то сразу поймете, о чем идет речь. Если нет, то, вероятно, догадаетесь, что это означает что-то вроде «производительности», но не поймете почему. А все дело в том, что это слово из языка частот Фурье.

Полоса пропускания – это технический термин, означающий меру пропускной способности канала связи. Например, человеческое ухо воспринимает звуки, обладающие частотой от 20 до 20 000 циклов в секунду. Таким образом, его полоса пропускания – это разница между ними, диапазон частот, улавливаемых ухом. В повседневном общении выражение «пропускная способность» используется метафорически для обозначения чего-то вроде способности обрабатывать информацию.

Язык частот, как в приведенном примере, разграничивает две культуры. Для искусства он китайская грамота – или, продолжая метафору с Розеттским камнем, язык частот (или язык волн Фурье) подобен древнеегипетским иероглифам. Теперь давайте посмотрим, как иероглифы Фурье – его волны в двумерном виде – могут представлять изображения.

Морщины и борозды

Что такое двумерная волна? До сих пор мы рассматривали только одномерные волны, вроде тех, которые изображают

звук. Для применения идеи Фурье к визуальному миру нам необходима двумерная версия волны.

Одномерная волна – это размотанная окружность. Двумерная волна – это раскрученный цилиндр. Чтобы представить двумерную волну, вообразите, что секундная стрелка из нашего примера с часами выдавливает изображение перпендикулярно странице. В результате получится рифленая поверхность, похожая на вспаханное поле с бороздами. Металлический профлист (рис. 1.6), которым обшивают стены зданий, – наглядный пример двумерной пространственной волны. Из гофрированных пластиковых панелей делают козырьки и навесы. Бывают даже рифленые картофельные чипсы. Волнистый слой между плоскими поверхностями гофрокартона – это тоже пространственная волна. Красная черепичная крыша в средиземноморском стиле – еще один пример.

Итак, гофра – это двумерная пространственная волна. Посмотрев на нее с краю или в поперечном сечении, вы увидите одномерную волну. Впрочем, любое ее прямолинейное сечение – это одномерная волна.

Великая идея Фурье заключается в том, что весь видимый мир можно представить только как сумму рифленых пространственных волн разных частот и амплитуд. Единственный дополнительный нюанс, связанный со вторым измерением, состоит в том, что волны могут поворачиваться в любую сторону. Борозды могут идти с севера на юг, с востока

на запад, с северо-востока на юго-запад или под любым другим углом, что особенно важно для мира природы. «Материалом» пространственных волн может быть оцинкованное железо или, как мы видим на рисунке, гофрированный пластик. Инженеры используют идею Фурье для описания всех сложных паттернов, как природных, так и рукотворных, состоящих из любых материалов, встречающихся в окружающем мире.

Но для понимания пикселя нам нужно учесть точку зрения того, кто смотрит на этот мир. Мир может состоять из железа, пластмассы и картофеля, но мы видим лишь яркое разноцветное поле со светлыми и темными формами и оттенками. Волны Фурье создают мир, который мы видим, из интенсивности света, изменяющейся в поле зрения.



Рис. 1.6

Как можно представить себе такое поле? Один из очевидных способов описать мир, воспринимаемый нашими глазами, – зарегистрировать интенсивность света в каждой точке поля зрения. Но учесть придется *каждую* точку. Поле зрения непрерывно: в нем в каждую воображаемую точку падает свет, и между ними нет промежутков. Независимо от того, насколько близко друг к другу расположены две точки, между ними обнаружится еще одна. То есть в поле зрения попадает бесконечное количество точек и, следовательно, бесконечное количество значений их освещенности.

Фурье предлагает альтернативный способ: представить видимый мир как сумму пространственных волн, сложение

которых даст ту же самую картину, что и описание каждой точки. Изображенное в верхнем ряду на рисунке 1.7, например, можно описать как значение серого в каждой точке или обозначив параметры всего одной волны Фурье. Пространственная волна, соответствующая этому рисунку, имеет частоту около двух циклов на дюйм, направлена по горизонтали, ее яркость колеблется от черного до белого. Вместо огромного количества оттенков серого в каждой точке для описания картинки нам понадобятся всего несколько значений – одна частота и одна максимальная амплитуда.

Кстати, в верхнем ряду на этом рисунке показана (частично) одна из волн Фурье, вид сверху. Совсем неудивительно, что это изображение полностью описывается «по Фурье» именно волной. Обратите внимание, что вы видите волновые колебания, составляющие картину в поле вашего зрения, точно так же как слышите вибрации, составляющие звук. «Материал», из которого сделаны волны на рисунке 1.7, – это интенсивность света (или яркость), воспринимаемая как разные оттенки серого. Гребни волны окрашены в более светлый серый цвет, а ложбины – в более темный. (Этот рисунок – двумерный аналог волнистых линий, изображенных на рисунке 1.2.)

Амплитуда волны соответствует яркости изображения, так же как для звука она соответствует громкости. Частота означает количество деталей – именно ее имеют в виду люди, когда говорят об изображении с высоким разрешением

или о видео высокой четкости. Большая амплитуда подразумевает высокую яркость, а высокая частота – подробную детализацию.

Если изображение неоднотонно, там присутствует информация еще и о цвете. В сетчатке нашего глаза есть три типа цветковых рецепторов – колбочек: по одному для интенсивности красного, зеленого и синего. Если точка на экране мобильного телефона или телевизора с определенной интенсивностью излучает красный, зеленый и синий цвета, то наш мозг получает от колбочек информацию об относительной силе этих трех сигналов и складывает из них итоговый цвет. В излучаемом электронными дисплеями свете первичные цвета смешиваются иначе, чем в свете, отраженном, скажем, от написанной маслом картины или отпечатанной в типографии страницы книги. Чтобы получить желтый цвет, мы должны включить красный и зеленый компоненты и выключить синюю часть. Но чтобы получить желтый свет, отраженный от страницы, мы должны блокировать синий элемент белого света и отражать только красный и зеленый. Независимо от технологии отображения глаз воспринимает все это одинаково. Поэтому далее я почти всегда буду использовать терминологию для излучаемого, а не отраженного света.

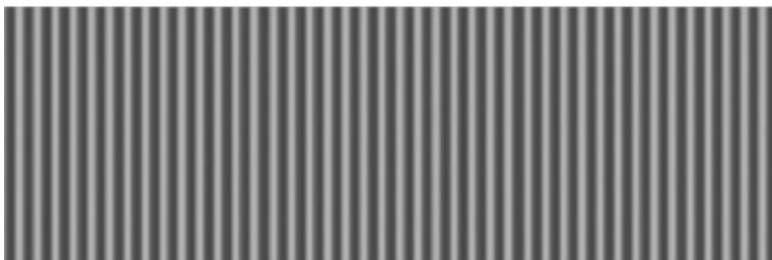
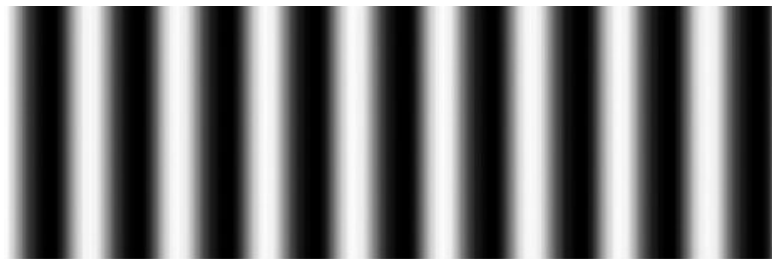


Рис. 1.7

Итак, представьте, что черно-белая картинка в верхнем ряду на рисунке 1.7 изображает цветную волну, скажем желтую. Гребень волны изображен серым – что-то между сред-

не-серым и полностью белым, а гребень цветной волны будет желтым – что-то между средне-желтым и полностью желтым. Далее представим цветную волну как три волны одной частоты, но разной амплитуды – по одной для красных, зеленых и синих рецепторов сетчатки. Итак, желтая волна состоит из трех волн: первая похожа на показанную выше волну в градациях серого для красного рецептора, вторая точно такая же (и с той же амплитудой) для зеленого рецептора и третья такая же, но с нулевой амплитудой для синего рецептора. При равном количестве красного и зеленого и при отсутствии синего наш мозг видит желтую волну.

В среднем и нижнем рядах на рисунке 1.7 показаны другие двумерные волны – посмотрите, как они выглядят. Как и у одномерных волн на рисунке 1.2, у них разные частоты и разные амплитуды. Волна в нижнем ряду с самой высокой частотой имеет самую низкую амплитуду (серый цвет), а волна в верхнем ряду с самой низкой частотой имеет самую высокую амплитуду (почти белый цвет). Впрочем, это лишь пример. Волна может иметь любую частоту при любой амплитуде.

Итак, можем сделать вывод: мелким деталям на картинке при ее описании по Фурье соответствуют высокочастотные волны. Именно они изменяются достаточно быстро. В жаргоне специалистов по компьютерной графике есть выражение «В этой сцене много высоких частот», означающее, что в ней много мелких деталей и резких стыков.

Последнее замечание о стыках касается существенного факта, который стоит знать. Его непросто понять, но он напрямую вытекает из математики Фурье: внезапный переход на резком стыке требует высоких частот; очень внезапные изменения требуют очень высоких частот.

Вот как я формулирую изюминку теории Фурье:

Любое визуальное поле – назовем его картинкой или узором – представляет собой сумму исключительно изящных синусоидальных волн, подобных тем, что получаются при разворачивании идеальных цилиндров.

Визуальный мир в виде волн не более загадочен, чем мир звука, – или, скажем так, столь же чудесно загадочен. Геттисбергскую речь можно описать как интенсивность звукового давления в каждый момент выступления Авраама Линкольна или как сумму звуковых волн различных частот и амплитуд, получив при сложении то же самое. Фурье научил нас, что оба описания эквивалентны.

Ученые и инженеры любят предложенный Фурье подход, потому что, используя его, они могут решать проблемы, с которыми сложно справиться при пошаговом описании.

Вместо того чтобы учитывать тысячи и тысячи световых точек, мы основываемся на частотах и амплитудах волн интенсивности света, которые складываются в точки. Изменившее мир учение Фурье заключает, что эти два описания эквивалентны. Визуальное поле из точек, если продолжить

аналогию с Розеттским камнем, – это древнегреческий язык, а эквивалентные ему волны Фурье – иероглифы. Компьютерщику легче читать иероглифы, чем древнегреческий, но, согласно идее Фурье, это одно и то же – Розеттский камень тому подтверждение.

Критики Фурье не верили в его правоту, но математическое доказательство сомнений не оставило. Это и есть магия идеи и сокрушительная сила математики. Сложение волн разных частот даст нам картину... чего угодно! Моего цветочного сада, страницы, которую вы сейчас читаете, или фотографии вашего ребенка. В этом и заключается великая и очень важная идея Фурье.

Жажда тепла

Благодаря Бонапарту Фурье удалось пережить Террор и даже войти в правящую элиту Франции – если, конечно, считать элитой губернатора отдаленной провинции. Увлечение революцией в молодости и личное знакомство с императором могли доставить немало проблем, когда король дважды возвращался во власть. Тем не менее Фурье пережил эту круговерть, как и времена Террора. Опираясь на свой солидный политический опыт, он даже умудрился почти 13 лет продержаться в должности префекта департамента Изер, и только последний год оказался рискованным.

В течение 12 лет – с апреля 1802-го по апрель 1814-

го – Фурье с максимальной пользой проводил свое изгнание, зарекомендовав себя в качестве опытного губернатора. Ему удалось заключить соглашение с сорока коммунарами об осушении огромного болота в Бургуэне, что стало настоящим политическим достижением, поскольку все предыдущие попытки договориться провалились. Он проложил новую дорогу из Гренобля в Турин. Он покупал книги для городской библиотеки, покровительствовал одаренным молодым людям, в первую очередь Шампольону, и работал над многотомным «Описанием Египта», которое увидело свет в 1810 году. Несмотря на сильную занятость, Фурье каким-то образом нашел время для развития волновой теории. К ней его привели не прослушивание концертов Моцарта или созерцание красот Альгамбры, а размышления о распространении тепла как о движении волн. Возможно, его *théorie de la chaleur* (теория тепла) – а вместе с ней и его великая гармоническая идея – были его хитрым планом по возвращению в Париж.

Сам Фурье так говорил о своем экстраординарном интересе к теплу: «Вопрос о температурах земной почвы всегда представлялся мне одним из величайших предметов космологических исследований, и при создании математической теории тепла я главным образом имел в виду этот предмет». Он искал идею столь же грандиозную, как законы Ньютона.

Виктор Кузен, французский историк и философ, хорошо знавший Фурье, придерживался иного взгляда на мотивы

вы ученого. Он писал, что, когда Фурье вернулся в Гренобль из Египта, он даже в самую жаркую погоду выходил на улицу только в пальто и на всякий случай брал с собой еще одно. У него развилась физическая потребность в тепле, что кажется эксцентричным, но, скорее всего, является симптомом какой-то болезни.

У французов есть слово, обозначающее таких людей. В английском языке оно отсутствует и имеет лишь отдаленный аналог в русском: Фурье был *frileux* – мерзляк. Он постоянно мерз. Он был избыточно, вероятно, даже болезненно чувствителен к холоду. Французское слово также несет дополнительный смысловой оттенок – что такой человек неспособен к личным теплым отношениям. Некоторые, возможно, считали, что Фурье к ним излишне холоден.

Неизвестно, когда Фурье начал писать свою работу о тепле, но она захватила его еще в Гренобле, всего через пару лет после возвращения из Египта. Ее еще несовершенная черновая версия, относящаяся, вероятно, к 1804 или 1805 году, содержит первое известное упоминание волновых функций. Академической публике Фурье представил значительно переработанный вариант этой рукописи в конце 1807 года в форме трактата под названием «Воспоминания о распространении тепла в твердых телах». За время, прошедшее между черновым наброском и окончательной версией, он разобрался в физике распространения тепла и провел множество экспериментов для проверки своих математических

расчетов.

По словам Фурье, эксперименты «способствовали тому, чтобы придать теории авторитет, от которого иначе пришлось бы отказаться в вопросе все еще неясном и, по-видимому, подверженном стольким неопределенностям». Так выглядит классическая наука. Разработайте теорию для выдвижения гипотезы. Проведите эксперимент для ее проверки. Слова Фурье доказывают, что он одновременно был математиком и физиком-экспериментатором. Он не боялся запачкать руки.

Фурье понял, что может описать сложную картину теплового потока, проходящего через твердый объект, как сумму синусоидальных волн. Это означало, что он мог предсказать, как (и на протяжении какого времени) тепло будет распространяться, скажем, от запального фитиля пушки к ее жерлу.

Итак, для понимания контекста: между 1803 и 1807 годами, пока Фурье совершенствовал свою теорию передачи тепла и проводил подтверждающие ее эксперименты, он также заключал контракты на осушение болот, строил дороги, наставлял молодых людей и работал над публикацией исследования о Египетской экспедиции. Откуда у него такая пропускная способность?

Фурье одинаково хорошо ориентировался в политике как республики, так и империи. Он использовал свое личное знакомство с Наполеоном, чтобы утвердить проект строительства большой дороги между городами, передав импера-

тору короткую пояснительную записку. Наполеон рассмотрел и утвердил проект всего за два дня. А вот отношения с научными кругами оказались не столь успешными, поскольку в изгнании Фурье отделился от академических интриг, происходивших в Париже.

В академических кругах одним из первых с его трактатом 1807 года ознакомился Лаплас, тот самый, которого Наполеон назначил сенатором и который знал Фурье еще по Политехнической школе. Лапласу не нравилась математика, лежащая в основе великой идеи Фурье. Первую публичную атаку на него провел протеже Лапласа Симеон Дени Пуассон, который после назначения Фурье префектом Изера занял его кафедру в Политехнической школе. В результате долгой и ожесточенной полемики трактат так и не был опубликован Академией. Лаплас в конце концов согласился с идеями Фурье, но Пуассон так и не изменил своего мнения.

По мнению потомков, Фурье впервые изложил свою теорию в работе 1807 года, поэтому можно считать, что на 2007 год пришелся ее неотпразднованный двухсотлетний юбилей. Однако прежде чем получить заслуженное внимание, Фурье пришлось ответить еще на один вызов. Вероятно, из-за продолжительных споров Академия объявила, что в 1811 году присудит большую премию в области математики за исследования... распространения тепла в твердых телах! Фурье в ответ написал Призовое эссе – расширенную версию работы 1807 года, сохранившую ее основные поло-

жения.

Итак, давайте еще раз вспомним, чем занимался Фурье, когда готовил эссе на соискание премии: болота; дороги; наставничество; «Описание Египта». Вопрос все тот же: откуда у него такая полоса пропускания?

Одна из дополнительных тем, затронутых в Призовом эссе, намекает на ньютоновские амбиции Фурье. Он, применив свою теорию теплового потока в планетарном масштабе, первым обратил внимание на глобальное явление, которое сейчас принято называть парниковым эффектом. Солнечный свет, проходящий через атмосферу, нагревает поверхность Земли, но при этом часть отраженного тепла удерживается. Если прибегнуть к несовершенной метафоре, то атмосфера напоминает стекло теплицы, которое пропускает солнечный свет, но не выпускает наружу тепло. В результате естественного парникового эффекта Земля нагревается и становится местом, пригодным для жизни. Несмотря на всю свою гениальность, Фурье не предвидел, что деятельность человека усилит парниковый эффект до такой степени, что излишнее тепло превратится в угрозу для жизни на нашей планете.

Несмотря на интриги академиков, Фурье получил премию за свое Призовое эссе. Но при этом ознакомившаяся с работой комиссия единодушно не проявила. В частности, Лаплас голосовал против.

«Способ, которым автор приходит к этим уравнениям, не лишен недостатков, – говорится в отчете комиссии. – Его

способ аналитического вычисления интегралов все же оставляет желать лучшего с точки зрения общности и даже математической строгости решения».

Упреки за недостаточную строгость в математике – это серьезное оскорбление для ученого. Академия снова медлила с публикацией Призового эссе, как и с сочинением 1807 года.

Лишь после окончательного изгнания Наполеона на остров Святой Елены в 1815 году Фурье вернулся в Париж и опубликовал свое Призовое эссе. Оно вновь подверглось испепеляющей критике от непримиримого Пуассона. Но Фурье обнаружил элементарную ошибку в трудах своего недоброжелателя и ложное утверждение в его альтернативной теории тепла. В письме к Лапласу Фурье торжествующе указал на них, чем нанес сокрушительный удар по позициям Пуассона. Лаплас наконец склонился на сторону Фурье.

Танцы с тиранами

Триумфальным достижениям в науке не сопутствовал столь же блестящий успех в политике. Продолжились танцы с Наполеоном, осложнившие последний год Фурье на посту префекта Изера. Наполеон отрекся от престола в апреле 1814 года. На трон взошел король Людовик XVIII. Бывший император отправился в свое первое изгнание на остров Эльба примерно в 30 милях к востоку от Корсики и почти

в 200 милях к юго-востоку от Парижа. Вполне естественно, что его путь пролегал через Гренобль. В нормальных условиях префекту провинции полагалось бы естественным поприветствовать человека, которому он обязан назначением на столь высокий пост. Фурье должен был принять у себя бывшего императора. Но времена настали необычные, поэтому встреча обещала быть неловкой.

Реставрация Бурбонов не затронула положение Фурье, но не сочтет ли Наполеон подчинение королю предательством, перебежничеством? Фурье не собирался выяснять это. Путем закулисных интриг он внес в маршрут Наполеона коррективы, предупредив, что бывшему императору в Гренобле грозит опасность. Замысел сработал. Встречи с Наполеоном удалось избежать. Новому правительству предстояло утвердить Фурье в должности префекта. Младший брат нового короля граф д'Артуа, впоследствии ставший королем Франции Карлом X, нанес ему визит, завершив этот процесс.

Но танцы с Наполеоном не закончились. 2 марта 1815 года Фурье получил от префекта соседней провинции пугающее письмо:

Имею честь сообщить вам, что Бонапарт во главе 1700 человек высадился вчера в бухте Жуан [и] направляется в Лион через Сен-Валье, Динь и Гренобль. Какой бы необычной ни показалась вам эта новость, она абсолютно правдива.

Наполеон триумфально вернулся из ссылки, чтобы сверг-

нуть короля и еще 100 дней править Францией. Он возвращался с юго-востока по тому же роковому маршруту, соединявшему Эльбу и Корсику с Греноблем, Осером и Парижем. Фурье снова пришлось искать способа избежать опасной встречи, особенно после того, когда он с таким успехом выставил себя лояльным роялистом.

Он подготовил резиденцию префектуры к встрече императора. Фурье оставил приветственную записку для Наполеона, в которой объяснил причины своей лояльности новому королю и конфликта интересов. Затем он спешно покинул Гренобль и приближался к Лиону, когда Наполеон триумфально вошел в город через главные ворота.

Разгневанный Наполеон потребовал сместить Фурье с поста префекта. Как мог узурпатор – так назвал Наполеона Фурье – сместить назначенного префекта? Сила этого человека заключалась в том, что он сделал это, а Фурье и граждане Гренобля сочли его решение законным.

Впрочем, друзья Фурье из окружения Наполеона успокоили императора, показав ему «Историческое введение» Фурье к «Описанию Египта», полное похвал гению Бонапарта. Гнев его остыл, и он попросил встречи с Фурье. Они встретились в Бургуэне, где Фурье некогда занимался осушением болот. Сложно понять, что сыграло решающую роль в динамике их отношений. Слабость к интеллектуалам, особенно к математикам? Сохранившиеся со времен Египетской экспедиции отношения как между старыми товарищами? Как бы

то ни было, император не только простил Фурье, но и назначил его префектом департамента Рона, управляемого из Лиона! Фурье вступил в новую должность 12 марта 1815 года, всего через десять дней после получения письма, сообщавшего о возвращении Наполеона с Эльбы. В тот год события развивались очень быстро. 18 июня Наполеон потерпел поражение при Ватерлоо, а 8 июля на престол вновь взошел Людовик XVIII.

Второе имперское правление Наполеона продлилось знаменитые Сто дней, но вторая префектура Фурье оказалась еще короче – около шестидесяти. Одним из последних своих актов Наполеон – всего за две недели до Ватерлоо – назначил Фурье пенсию в связи с уходом в отставку. Акт должен был вступить в силу через две недели. Конечно, положенных выплат Фурье так и не получил. Итак, Наполеон отправился в ссылку на остров Святой Елены, а Фурье остался без работы, без пенсии и с запятнанной политической репутацией.

Но, по крайней мере, его изгнание наконец закончилось. Теперь он мог вернуться в Париж и создать свою музыкальную теорию тепла.

Жозеф и Софи

Была ли у Фурье личная жизнь? Может быть, не в провинциальном Гренобле, а в столице? Конечно, хотелось бы, чтобы у создателя концепции мира-как-музыки случился дра-

матический роман, подобный тому, который десятилетием ранее закрутился у Бенджамина Франклина с овдовевшей хозяйкой известного французского салона.¹

Возможно, дело в странных недугах Фурье, но он так и не встретил свою мадам Гельвецию. Нам, к сожалению, вообще не известно ни об одном его романтическом увлечении. Единственный намек на близкие отношения – очевидно, чисто платонические – это его глубокая дружба с Мари-Софи Жермен. Она стала первой женщиной, получившей математическую премию Академии наук, и разочаровала «огромную толпу, которая, несомненно, была привлечена желанием увидеть новый вид виртуозности в науке», тем, что не явилась на ее вручение. Однако даже достигшая таких высот женщина не могла получить приглашение на заседания Академии. Она добилась постоянного разрешения посещать *séances*, или собрания академиков, только спустя семь лет после начала постоянной переписки с Фурье. Именно он сделал это возможным.

Сохранился небольшой архив с письмами Фурье к Мари-Софи. Все они формальны, кроме одного, написанного, судя по неровному почерку, в последние годы. Оно адресовано «Ch. S.» (*Chère Sophie*, дорогой Софи) и подписано «J» (*Joseph*, Жозеф). Еще в одном письме Фурье обращался

¹ Здесь имеется в виду Анна Катерина де Линевилл, вдова французского литератора и философа-материалиста Клода Адриана Гельвеция, с которой Франклин познакомился в конце 1770-х, будучи послом Америки в Париже. – *Прим. пер.*

к врачу с просьбой о конфиденциальной помощи для дорогого, но неназванного друга, у которого имелись проблемы со здоровьем:

Она достойна всего вашего внимания по причине редчайших и прекраснейших качеств. Что касается меня, нежно любящего ее, то, поскольку это совершенно непредвиденное событие может совершенно уничтожить чувства, которые я питаю к ней, я был бы глубоко благодарен за все, что вы могли бы сделать для нее и для меня.

Точно неизвестно, о ком идет речь, но Софи Жермен действительно умерла от рака молочной железы. Какие чувства обуревали его, если это действительно была Софи?

Стать бессмертным

Фурье наконец-то стал членом Академии наук в Париже (рис. 1.8). В 1821 году состоялась публикация полной версии его теории под названием «Аналитическая теория тепла». К нему постепенно приходило признание. Французская академия наук избрала Жан-Батиста Жозефа Фурье постоянным секретарем, а Королевское общество Ньютона в ноябре 1823 года сделало его иностранным членом. Он, так завидовавший Ньютону в возрасте 21 года, в 55 лет, на последнем десятке лет своей жизни, проложил себе путь в бессмертие. Его внесли в официальный список *immortel* – «бессмерт-

ных» Французской академии наук – в 1826 году, а Гюстав Эйфель в 1889-м поместил его имя в числе 72 выдающихся французских ученых и инженеров на цоколе балкона первого яруса знаменитой башни.



Рис. 1.8

После смерти Наполеона Фурье получил пенсию. Поначалу королевское правительство выражало недовольство, что Фурье согласился стать префектом Роны в роковые Сто дней. Первый раз он попытался добиться назначе-

ния пенсии сразу после ссылки Наполеона на остров Святой Елены. Просьбу отклонили. Он пытался снова в 1816, 1818 и 1821 годах, но каждый раз получал отказ. Только пятая попытка, уже после смерти Наполеона, увенчалась успехом.

Политические баталии для него закончились, но усугубились проблемы со здоровьем. Он постоянно страдал от тех или иных недугов. В пожилом возрасте его так беспокоили проблемы с дыханием, что он построил для себя специальный ящик. Эта конструкция поддерживала тело в вертикальном положении во время письма, чтения лекций или сна. Наружу оставались торчать только голова и руки. Возможно, одышка возникла из-за удушающей атмосферы в шкафу, где Фурье проводил ночи, будучи подростком, или была признаком застойной сердечной недостаточности.

Фурье умер от сердечного приступа в 1830 году, пережив Наполеона всего на несколько лет. Его могила на знаменитом парижском кладбище Пер-Лашез украшена синусоидальными волнами и египетскими мотивами. По обе стороны от его бюста выгравированы лилии с очень длинными стеблями – осями волн. Каждая лилия заканчивается вздыбленной коброй, увенчанной солнечным диском.

Возможно, именно Египет довел Фурье до одержимости теплом, так что символика надгробия прославляет как причину, так и следствие.

Другой выдающийся гражданин Гренобля – Жан-Франс-

уа Шампольон, первый профессор египтологии, – скончался через два года и тоже похоронен на Пер-Лашез. Его брат Жак-Жозеф Шампольон-Фижак написал одну из самых ранних биографий Фурье. «Дорогая Софи», близкая подруга Фурье Софи Жермен – Фурье вряд ли вел себя как *frileux* рядом с ней – тоже покоится на Пер-Лашез.

Незадолго до своей смерти Жермен сделала взнос в фонд на создание надгробного памятника Фурье на Пер-Лашез. Пуассон, до последнего противостоявший им обоим, отказался пожертвовать деньги на это. Не вполне удачно складывалась и судьба «Воспоминаний...», оригинального шедевра Фурье 1807 года, где впервые была сформулирована великая теория. Рукопись пропала более чем на 160 лет, пока наконец не обнаружилась в библиотеке Национальной школы мостов и дорог (École nationale des ponts et chaussées). Это не так странно, как кажется на первый взгляд. Эта школа – старейшее инженерно-строительное учебное заведение в мире, даже старше самого Фурье.

Природа гения

Почему великая идея Фурье встретила такое сопротивление? Проблема, по мнению его критиков, заключалась в следующем: как может что-то непостоянное – например, некая песня или картина – быть эквивалентно сумме регулярных волн?

В математике ничто не принимается на веру: либо доказано, либо нет, либо доказана недоказуемость. Сам Фурье, несмотря на удивительную интуицию, не сумел покорить эту вершину истинности в математическом выражении своей теории. Восполнить оставшиеся пробелы удалось молодому Петеру Густаву Лежёну Дирихле. Он приехал в Париж в 1826 году, познакомился с Фурье и был очарован им. Под руководством пожилого наставника Дирихле с математической строгостью обосновал теорию и опубликовал свои изыскания в 1829-м, в последний год жизни Фурье.

Тем не менее некоторых математиков все еще беспокоят дальние эзотерические заводы математики Фурье. А вот у инженеров дела обстоят иначе. В конце 1960-х я прошел чрезвычайно важный базовый курс по рядам Фурье у Рона Брейсвелла в Стэнфорде. Он усердно подчеркивал существование математических трудностей на периферии теории Фурье и строгие пределы ее применения. Но он также пояснил, что математические тонкости не мешают использовать ее при анализе явлений реального мира. Или, скорее, он четко дал понять, что реальный мир находится в пределах, установленных такими математиками, как Дирихле.

Математики имеют дело со всеми возможными узорами, а не только с теми, которые мы действительно встречаем в реальном мире. Математики изучают абстракции, а инженеры работают с физическими реалиями: теплом, светом, звуком, дорогами и мостами, изображениями. Для инжене-

ров частоты и амплитуды Фурье такие же «физические», как и весь физический мир, который они описывают. Если Мать-природа создает закономерность, то великая идея Фурье почти всегда подходит для ее описания.

Ньютон и Эйнштейн знали, что обращаются с целой Вселенной, так же как об этом знают их последователи. Фурье, как и другие ученые, жившие в его время, не предвидел или не мог предвидеть, насколько универсальной окажется его великая музыкальная идея. У нас нет слов для обозначения гениальности, накапливающейся с течением времени или связанной с обширными последствиями развития идеи. Обычное представление о гениальности привязано к человеческой жизни – как в достижениях, так и в признании.

Тем не менее на протяжении двух столетий инженеры успешно и широко использовали гармоническую идею Фурье для нашего комфорта и развлечения. На ней основаны все современные средства передачи информации. Пиксель и история Цифрового Света – лишь один из последних примеров.

Несомненно, теперь Фурье оценен по заслугам, и неважно, будем ли мы называть его гением или нет. Если мы пройдем по тонкой линии, разделяющей гуманитарную и техническую культуры, то без труда заметим, что он известен и уважаем с обеих сторон.

2. Отсчеты Котельникова: ничто из ничего

Это – глухая, совершенно недостоверная, никем не подтвержденная легенда, которую нет-нет да и услышишь в лагерях: что где-то в этом же Архипелаге есть крохотные райские острова. Никто их не видел, никто там не был, а кто был – молчит, не высказывается. На тех островах, говорят, текут молочные реки в кисельных берегах, ниже как сметаной и яйцами там не кормят; там чистенько, говорят, всегда тепло, работа умственная и сто раз секретная. И вот на те-то райские острова (в арестантском просторечии – шарашки) я на полсрока и попал. Им-то я и обязан, что остался жив...

– Александр Солженицын. «Архипелаг ГУЛАГ»

Человек, который изобрел пиксель и начал цифровую революцию, был председателем Верховного Совета РСФСР. Не в одно и то же время, но все-таки это один и тот же человек. Звали его Владимир Котельников. В 2003 году, когда ему исполнилось 95 лет, другой Владимир – Путин – вручил ему в Кремле орден «За заслуги перед Отечеством» I степени. Ранее Котельников получил и множество советских наград, в том числе шесть орденов Ленина, две Сталинские премии, две звезды Героя Социалистического Труда. Он пе-

режил Октябрьскую революцию 1917 года, а также все репрессии и войны, которые с тех пор составляют историю современной России. Он едва избежал ГУЛАГа – а точнее, тех самых «райских островов» внутри него, где трудился Солженицын, – поскольку находился под защитой влиятельной жены одного из самых кровавых приспешников Сталина. Он поделился с американцами информацией о первом советском искусственном спутнике Земли и составил карту Венеры с помощью цифровых изображений – пикселей, полученных из космоса.

Заслуги Котельникова, что вполне ожидаемо для вдохновителя Великой цифровой конвергенции, отмечены и в Америке: в 2000 году он награжден медалью Александра Грэма Белла. Тем не менее его имя мало кому известно в Штатах. За ним редко признают одно из величайших открытий XX века – теорему выборки, идею, лежащую в основе всего мира цифровых медиа. Лавры первооткрывателя обычно достаются Клоду Шеннону, известному американскому инженеру и математику, хотя Шеннон никогда на них не претендовал.

Как и в биографии Фурье, в судьбе Котельникова проявились три движущие силы технологического прорыва: великая научная идея, хаос революции и войны, требующий воплотить ее в конкретное изобретение, и тираны, защищающие ученых и продвигающие их технологии.

Великая идея Котельникова, напрямую ведущая к пикселю, вплетена в поразительно параллельные судьбы малоиз-

вестного Котельникова и знаменитого Шеннона.

Разбрасыватель

Идея состоит в следующем: цифровое может *достаточно точно* представлять аналоговое. Дискретное, прерывистое и импульсное может точно представлять гладкое, непрерывное и плавно изогнутое. Прерывистая последовательность может точно представлять последовательную непрерывность. Возможно, сейчас вас это не удивляет, но я надеюсь все-таки удивить вас, потому что оказывается, что мы можем отбросить поразительное – фактически бесконечное – количество информации, практически ничего не теряя. Эта ключевая идея сделала возможным Цифровой Свет (а также цифровой звук). Эта фундаментальная истина лежала в основе Великой цифровой конвергенции и, следовательно, всего современного мира.

Подобно тому как волна – это форма, представляющая частоты Фурье, существует форма, представляющая отсчеты, или выборки, Котельникова (см. рис. 2.1). Вскоре мы увидим, что это тесно связано с «формой» пикселя. Математики называют это «каменной стеной» или *sinc-фильтром*, а инженеры – реконструкционным или *восстанавливающим фильтром*. Поскольку оба названия не вполне понятны, я буду называть эту прекрасную форму «разбрасывателем». Вскоре вы поймете почему.

Обратите внимание, что она напоминает одну из волн Фурье, гребни и впадины которой постепенно уменьшаются до тех пор, пока в любом направлении не сводятся к нулю. На самом деле это именно то, ради чего все и затеяно. Соответствующая волна везде имеет амплитуду, равную центральному горбу, и частоту, равную частоте колебаний «разбрасывателя» (рис. 2.2).

«Разбрасыватель» пришел из математики, а не из реального мира, но он напоминает расходящиеся круги от брошенного в воду камня – их высота тоже уменьшается с увеличением расстояния. Подобно им, его волна бесконечно движется в каждом направлении, но на некотором расстоянии от центрального горба гребни ее становятся настолько низкими, что уже не имеют значения. Как мы увидим, это очень важно в реальном мире. Самое раннее изображение «разбрасывателя», которое я нашел, в правильном контексте появляется в классической статье Владимира Котельникова, опубликованной в 1933 году (рис. 2.3).

Впервые я узнал об этой замечательной идее в начале 1960-х на электротехническом факультете. Нам рассказывали, что ее выдвинул Гарри Найквист, американский инженер и настоящий герой для нас, инженеров-электронщиков. Он работал в легендарной «Лаборатории Белла» (Bell Labs) в AT&T – мы все мечтали трудоустроиться туда. Но в конце 1960-х, когда я учился в Стэнфорде, информатика наконец-то стала отдельной дисциплиной и автором великой

идеи начали называть Клода Шеннона, нашего нового героя во всем, что касалось цифровых технологий. Он первым использовал слово «бит» в печати. И он тоже работал там в качестве младшего коллеги Найквиста.

Но это американская версия событий, и здесь вступает в действие закон Стиглера: «Никакое научное открытие не было названо в честь первооткрывателя». (Сам Стиглер, кстати, считал, что этот закон открыт Робертом Мертоном.) Так что в России, безо всяких колебаний, лавры первооткрывателя всегда отдают Котельникову. В Японии эти заслуги приписывают Исао Сомея. В Англии – сэру Эдмунду Уиттекеру. В Германии – Герберту Раабе. Впрочем, если на то пошло, Найквист родился в Швеции. И только Шеннон – истинный американец, родившийся в Мичигане. Можно ли считать желание приписать ему лавры первооткрывателя проявлением нездорового патриотизма? Все вышеперечисленные сформулировали свои версии этой идеи раньше Шеннона, кроме Сомея – он опоздал на несколько месяцев. Получается, что чести дать свое имя теории – во всяком случае, в Соединенных Штатах – удостоился человек, сформулировавший ее практически последним.

Несмотря на всю путаницу с именовани^{ем}, факты говорят сами за себя: великую идею – в том виде, в котором она используется в Цифровом Свете, – впервые четко, ясно и обстоятельно изложил и доказал Котельников в 1933 году. Нам на Западе трудно поверить, что такая фундаментальная идея

появилась в худшие дни сталинской России. Во время холодной войны нас учили, что советская наука если не фальшивка, как биология Лысенко, то в лучшем случае основана на украденных идеях или раздута пропагандой. Придется смириться, что авторство Котельникова неоспоримо.



Рис. 2.1

Происхождение, работы и карьера

Владимир Александрович Котельников родился в 1908 году в Казани, старинном городе на Волге примерно в 500 милях к востоку от Москвы. Трудно представить ученого со столь же безупречной математической родословной. Его прапрапрадед Семен Котельников учился у Леонарда Эйлера, одного из величайших математиков всех времен. Часть математического аппарата, который использовал Фурье, – это прямое наследие Эйлера. В 1757 году Семен Котельников стал одним из первых академиков Санкт-Петербургской академии наук, основанной Петром Великим и ныне именуемой Российской академией наук.

Дед Владимира, Петр Семенович Котельников, был математиком в Казанском университете. Там в разное время учились Владимир Ленин и Лев Толстой, но Ленина исключили всего через три месяца после поступления, а Толстой бросил университет после второго курса. Среди тех, кто успешно закончил Казанский университет, наиболее известен математик Николай Лобачевский. Он бросил вызов древнегреческой геометрии Евклида, предположив, что ее пятый постулат о параллельных линиях не обязательно верен, – поразительная для того времени идея впоследствии заняла достойное место в общей теории относительности Эйнштейна. Петр Семенович был ассистентом Лобачевского, а затем занял пост декана физико-математического факультета.

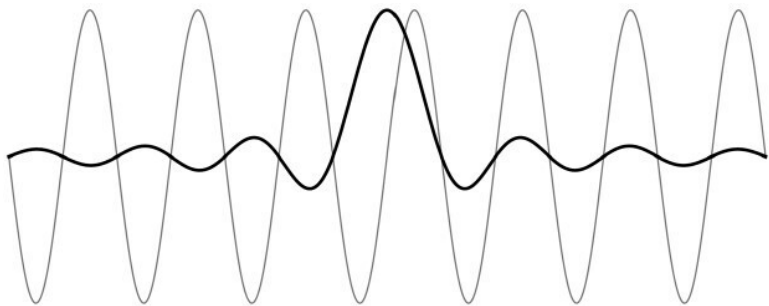


Рис. 2.2

все D_n , кроме одного, равны нулю. Такая $F(t)$ очевидно будет состоять из одного члена ряда (1). Значит и наоборот: если $F(t)$ состоит из одного, любого члена ряда (1), то весь спектр ее частот заключен в пределах от 0 до f_1 . А поэтому и сумма из любых отдельных членов ряда (1), т. е. сам ряд (1) будет всегда состоять из частот, заключенных в пределах от 0 до f_1 , что и требовалось доказать.

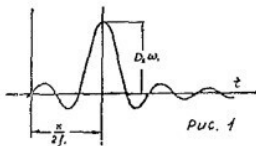


Рис. 2.3

Неудивительно, что отец Владимира, Александр Петрович Котельников, тоже окончил Казанский университет и тоже занимал пост декана физико-математического факультета. Но, что важно для нас, история Владимира Котельникова по-настоящему началась, когда Александр Петрович решил покинуть Казань и переехать с семьей в Киев, получив новую преподавательскую должность.

Котельниковы с шестилетним Владимиром прибыли в Киев в тот самый августовский день 1914 года, когда немецкая армия прорвала фронт. Население в панике бежало из города, увлекая за собой новоприбывших. С огромным трудом Котельниковым удалось на следующий день выбраться из Киева и вернуться в Казань. Семья попала прямо под первые удары Первой мировой, ставшей первой в череде войн, определивших жизнь и карьеру Владимира.

Следующими двумя стали Октябрьская революция 1917 года и последовавшая за ней Гражданская война между красными и белыми. Россия изменилась. Молодой Влади-

мир тоже, но причиной тому были не войны. Посреди всего этого хаоса он впервые услышал радиопередачу.

«Как это устроено?» – спросил он отца.

«Ты этого пока не поймешь».

Такой ответ он воспринял как вызов и уже с десяти лет всерьез захотел разобраться, как работает радио. Большую часть следующих девяти десятилетий своей жизни он занимался радиотехникой и связью, а в его карьере отразились подъемы, потрясения и падение Советского Союза.

«Велик был и страшен год по Рождестве Христовом 1918, от начала же революции второй». Так начинается роман «Белая гвардия» Михаила Булгакова – повествование об ужасах, разрушениях и анархии, царивших в Киеве в годы Гражданской войны. Во второй раз Котельниковы выбрали неудачный момент, чтобы переехать туда. Им пришлось пережить весь описанный Булгаковым кошмар. Профессор варил мыло, а дети распускали занавески на нитки; денег не хватало, работы не было.

В 1924 году Александр Петрович перевез семью в Москву. Он получил профессорскую должность в Московском высшем техническом училище (МВТУ), старейшей высшей технической школе в России. МВТУ подверглось серьезным трансформациям в 1930 году, когда разделилось на пять самостоятельных учебных заведений. Одно из них – Московский энергетический институт (МЭИ) – стало одним из ведущих технических университетов мира. Можете считать

его московским аналогом Массачусетского технологического института.

Владимир Котельников был одним из первых выпускников МЭИ. Сначала его туда не принимали из-за происхождения – он не был выходцем из рабоче-крестьянской среды, – но вскоре критерии изменились и ему удалось туда поступить. В 1931 году Котельников закончил МЭИ, получив диплом инженера-электрика по специальности «Радио». Он проработает в своей альма-матер следующие 75 лет.

Через некоторое время случился его *annus mirabilis*. В 1932 году аспирант Котельников самостоятельно, без всякой посторонней помощи, написал две статьи, каждой из которых было достаточно, чтобы открыть ему путь на инженерный олимп. Одна из них – «Теория нелинейных фильтров с делением частоты пополам» – не касается темы нашего исследования. Однако в другой содержалась интересующая нас великая идея – теорема отсчетов. Завершая обучение в аспирантуре, Котельников представил свои работы в ноябре ученому совету факультета, а в следующем году опубликовал под неприметным названием «О пропускной способности „эфира“ и проволоки в электросвязи».

Когда он представлял эту работу преподавателям МЭИ, один из них сказал: «Все вроде верно, но больше похоже на научную фантастику». Нечто из ничего. Тем не менее они одобрили статью, дав старт его академической карьере.

В 1933 году, продолжая преподавать в МЭИ, Котельни-

ков поступил на работу в НИИ связи Народного комиссариата связи (НИИС НКС). Связь на войне имеет первостепенное значение, поэтому неудивительно, что, захватив власть в октябре 1917 года, большевики в первый же день создали Народный комиссариат почт и телеграфов РСФСР, впоследствии преобразованный в НКС. Котельников, начав с должности инженера, со временем стал начальником собственной лаборатории связи, а впоследствии и целого института. Он всегда одной ногой стоял в академической башне из слоновой кости, а другой – в реальном мире политики и войн.

Фундаментальные идеи, изложенные в опубликованных работах, а также ответственная работа в двух престижных организациях давали возможность быстро продвигаться как в академических, так и в политических кругах. Как мы уже видели на примере Фурье, ни в той, ни в другой сфере нельзя избежать танцев с тиранами.

Цифровые и аналоговые бесконечности

Не будем стесняться слова *бесконечность*. На самом деле существует много разных видов бесконечности, но нам нужны только две: цифровая и аналоговая. Знакомая диаграмма (рис. 2.4) с секундной стрелкой часов поможет прояснить разницу.

Вы помните, что для каждого оборота, который совершает секундная стрелка, каждой минутной отметке на цифербла-

те часов соответствует одна круглая черная точка на волне? По мере того как секундная стрелка движется по циферблату, точки бесконечно разворачиваются вправо. Сколько их? Ну, вы можете попытаться считать – раз, два, три и так далее, – но вам придется считать вечно. Это цифровая бесконечность. Последней точки нет, всегда можно добавить еще одну. Математики – по очевидной причине – называют это счетным множеством.

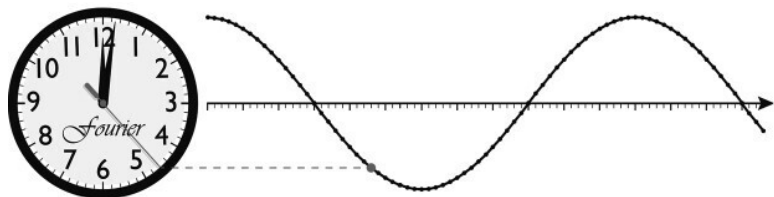


Рис. 2.4

Второй вид бесконечности – аналоговая бесконечность – не так прост. Рассмотрим две последовательные точки на волне. Сколько точек находится между этими точками? Ответ: их так много, что даже не сосчитать. Аналоговая бесконечность больше цифровой бесконечности, как бы странно это ни звучало. Математик Георг Кантор доказал, что это именно так, и вот как он это сделал.

Между любыми двумя точками на волне всегда есть еще одна точка. Теперь подумайте об этой средней точке и левой

из двух исходных. Есть ли между ними еще одна точка? Конечно есть. Теперь повторите рассуждение для этой точки и левой из двух исходных. И так до бесконечности. Вы никогда не разделите отрезок между точками на такие мелкие части, чтобы дальнейшее деление стало невозможным. Другими словами, вы никогда не доберетесь до места, откуда получится сосчитать все точки. Математики предпочитают называть это неисчисляемой бесконечностью, но я буду придерживаться термина «аналоговая бесконечность». Оба понятия уместны: у непрерывных вещей аналоговое, или бесчисленное, множество частей, а количество частей у дискретных вещей исчисляется цифровой, или счетной, бесконечностью. По большому счету цифровое уступает аналоговому, даже если вы использовали очень много точек для представления гладкой кривой. Но великая идея Котельникова, похоже, заключается в том, что цифровое – вот так сюрприз! – эквивалентно аналоговому. При переходе на цифровые технологии ничего не теряется. Дискретный цифровой объект может быть точным представлением гладкого аналогового объекта.

На рис. 2.5 показан фрагмент звука или, скажем, визуальной сцены вдоль горизонтальной линии. Идея Котельникова работает в обоих случаях. Прямая линия внизу – нулевая громкость или нулевой уровень яркости, полная тишина или полная темнота. Кривая – это изменение громкости звука или изменение яркости визуальной сцены по мере того, как вы перемещаетесь вправо по линии. В любом случае мы

отметим в исходном фрагменте черными зарубками точки, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга, – отсчеты. Мы начнем приходить к пониманию, отталкиваясь от этого одномерного примера, а затем постепенно перейдем к двум измерениям, необходимым для полной визуальной сцены. Точно так же мы поступили с волнами Фурье в первой главе.



Рис. 2.5

Рисунок 2.6 – это то, что вы получите, если удалите все точки на гладкой кривой, кроме тех, что отмечены черными зарубками. Между ними у нас есть только прямая линия нулевой громкости или нулевого уровня яркости. Нетрудно представить, как будет выглядеть двумерная версия. Представьте доску с гвоздями, забитыми на равных расстояниях по горизонтали и вертикали. Их высота варьируется в зависимости от яркости соответствующей гладкой поверхности – визуальной сцены. Везде, кроме мест, где расположены гвозди, высота поверхности будет нулевой.

Рисунок 2.5 – аналоговый, а рисунок 2.6 – цифровой. Вертикальные линии на втором называются *отсчетами* для ана-

логовой кривой – или *выборкой*. В случае доски с гвоздями для двумерной поверхности гвозди будут отсчетами соответствующей аналоговой поверхности. Замечательная теорема Котельникова гласит, что нам не нужна сама гладкая кривая для представления звука или сама гладкая поверхность для представления визуальной сцены. Нам нужны только отсчеты. Другими словами, на аналоговую бесконечность точек между отмеченными на первом рисунке черными зарубками можно не обращать внимания! Кажется, он говорит, что ничто может представлять нечто. Как такое возможно? Ответ кроется, конечно же, в слове «кажется».

Вы можете вообразить, что, если просто сделать очень-очень много отсчетов и разместить их достаточно близко друг к другу, они станут аналоговой звуковой кривой. У многих людей есть такое же интуитивное представление, что пиксели – какими бы они ни были, – расположенные достаточно близко друг к другу, станут соответствующей визуальной сценой. Но такое предположение ошибочно. Вы не можете достичь достаточно близкого расположения. Невозможно заставить цифровую бесконечность достичь плотности аналоговой бесконечности. Нельзя сосчитать неисчислимое. Но Котельников, кажется, говорит, что можно. Тогда как же это сделать?

Более того, его теорема гласит, что точки, показанные на втором рисунке, уже расположены *достаточно* близко друг к другу, то есть вы не получите ни преимуществ, ни до-

полнительной информации, взяв отсчеты, расположенные еще ближе. Вы все еще в недоумении? Я надеюсь на это, потому что сейчас я раскрою суть вопроса и продемонстрирую элегантность его идеи.

Итак, с этими витающими в воздухе вопросами мы уже почти готовы подступить к великой идее Котельникова. Но сначала вернемся к идее Фурье, поскольку теорема Котельникова базируется на ней. Фурье научил нас, что звук или изображение могут быть представлены как сумма волн. На рисунке 2.7 показана одна из волн, которые дают в сумме аналоговый фрагмент, использованный мной в качестве примера и для удобства изображенный сверху (места отсчетов обозначены точками). Вы можете *увидеть*, что в этом фрагменте нет колебаний вверх или вниз более быстрых, чем на волне, поэтому можно считать, что у нее самая высокая частота. Все остальные волны в сумме волн Фурье для этого фрагмента обладают более низкими частотами, иначе мы бы увидели где-то в этом фрагменте более быстрое колебание.

Перейдем к сути замечательной идеи Котельникова: если вы делаете отсчеты некоей гладкой аналоговой кривой с удвоенной частотой самой высокой частоты волн Фурье из составляющей ее суммы, то вы всегда сможете *точно* восстановить обратно эту гладкую кривую, используя только сделанную выборку. Отсчеты дискретные, разрозненные, отделенные друг от друга – определенно *не* гладкие. Это первая часть его идеи, великая теорема отсчетов – та часть, в ко-

торой утверждается, что аналоговую гладкость *можно* заменить цифровой несвязностью. Во второй части рассказывается, *как* выполнить фактическое восстановление исходного аналогового сигнала из цифровых отсчетов.

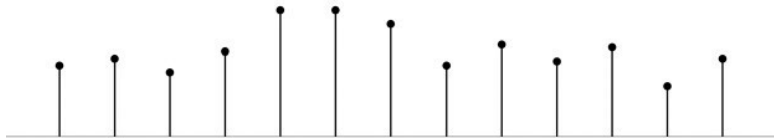


Рис. 2.6

Котельников стоит на плечах гиганта Фурье. Частоты Фурье отражают скорость изменения аналогового изображения в поле зрения. Затем гениальная идея Котельникова подсказывает нам, как представить волны Фурье в цифровом виде. Удивительно, но для каждого цикла самой быстро меняющейся волны достаточно всего двух отсчетов. Нетрудно догадаться, почему именно двух: одно измерение для гребня волны, а второе – для впадины.

Пиксель

В цифровом мире у отсчетов Котельникова для визуального поля есть устоявшееся название. Мы называем их *пикселями*. Вот оно! Это и есть определение пикселя. Оно тес-

но связано как с Фурье, так и с Котельниковым. Отсчеты Котельникова – вот что делает Цифровой Свет возможным.

Пиксели – это *не* маленькие квадратики! Некоторых это изрядно удивит, потому что *очень* часто пиксели описывают именно так – настолько часто, что люди повсеместно отождествляют пиксели с плотно расположенными маленькими цветными квадратиками. Это, возможно, самое распространенное заблуждение зарождающейся цифровой эпохи, а слово «*пикселизация*» его только укрепило.

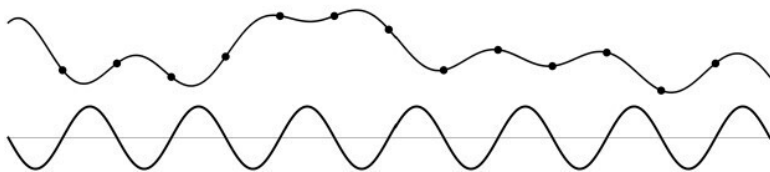


Рис. 2.7

На самом деле у пикселей нет формы. Это просто отсчеты, взятые в узлах регулярной сетки, – вспомните наш пример с гвоздями. Они представляют собой абстрактные точки нулевого размера, не имеющие длины, ширины и толщины. Они невидимы и бесцветны. Это просто число, кодирующее оттенок серого, или три числа, обозначающие три интенсивности цвета. Как мы увидим, именно восстановление аналогового из цифрового с использованием идеи Котельникова придает пикселям форму.

Самому слову «пиксель» пришлось побороться за право на существование. Пиксели поначалу назывались по-разному: например, *точки, массивы точек, растровые элементы, точки изображения и элементы изображения*. Последний вариант победил, но затем разгорелась битва за более короткий термин. В течение многих лет IBM и AT&T пытались сокращать «элемент изображения» (*picture element*) до *pel*. Но энергичное молодое сообщество середины 1960-х, занимавшееся обработкой изображений, одержало победу над усилиями гигантских корпораций, настояв на сокращении *pixel*. На самом деле для молодых гиков, работающих с компьютерной графикой, вроде меня, достигших совершеннолетия в те бурные годы, было делом чести обеспечить победу контркультуры «пикселя», свергнув «пел» Голубого Гиганта и Матушки Белл. Ричард Лайон, тщательно изучив историю словоупотребления, нашел самое раннее упоминание термина² *pixel* в документе 1965 года за авторством Фреда Биллингсли из Лаборатории обработки изображений, входившей в Лабораторию реактивного движения Калифорнийского технологического института (рис. 2.8). А самое раннее публичное использование *pel* зарегистрировано в статье профессора Массачусетского технологического института Уильяма Шрайбера в 1967 году.

В 1970-х годах было выдано много патентов, содержа-

² Голубой Гигант (Big Blue) – прозвище компании IBM. Матушка Белл (Ma Bell) – прозвище компании Bell Labs. – *Прим. ред.*

щих как *пиксель*, так и *пел*, причем в количественном отношении преобладали патенты с использованием первого термина. Неудивительно, что большинство патентов той эпохи с термином «пел» принадлежали IBM или Bell Labs компании AT&T. Если бы Найквист или Шеннон использовали некий термин для обозначения пикселя – чего они не делали, – их выбор наверняка пал бы на *pel*, термин, принадлежащий Матушке Белл.

Пиксель напрямую связан с теоремой отсчетов; выборки и пиксели объединены еще с рождения. Как ни странно, в теории цифрового звука нет специального слова, такого как «пиксель», для обозначения элемента выборки, или «семпла», хотя цифровой звук существует благодаря все тому же трюку с использованием отсчетов Котельникова. К сожалению, применительно к аудио слово «семплирование» имеет другое значение. В хип-хопе, например, так называют заимствование фрагментов чужой музыки длительностью в несколько секунд, их соединение или смешение. Чтобы не возникало путаницы, для обозначения звукового отсчета я буду использовать специальное слово «соксель» (*soxel*), сокращение от *sonic element* (звуковой элемент).

Игры в имена

Весьма проблематично, что приоритет в открытии тео-

ремы отсчетов в сегодняшних Соединенных Штатах приписывается Шеннону. Если оставить в стороне весь остальной мир, легко понять почему. Клод Шеннон – громкое имя в Америке. Теорему отсчетов он сформулировал в статье 1948 года «Математическая теория связи». В очень знаменитой классической статье 1949 года «Связь при наличии шума» он сформулировал и доказал теорему выборки в том виде, который сейчас используется во всем цифровом мире, а особенно применительно к Цифровому Свету. Его авторитет рос по мере того, как он получал различные престижные награды – например, национальную научную медаль США и медаль почета Института инженеров электротехники и электроники (IEEE). Он стал первым лауреатом премии, присуждаемой Группой теории информации IEEE и впоследствии названной в его честь. Он получил широкую известность на международном уровне и стал первым лауреатом премии Киото в области математики – награды не менее престижной, чем Нобелевская премия.

Since the

information band-width goes to 200 KC, by the sampling theorem, we must sample at least 400,000 samples per second. We have chosen to sample at a 500 KC rate and we define each one of these samples as a picture element or a pixel.

Рис. 2.8

Клод Элвуд Шеннон родился 30 апреля 1916 года в Пе-

тоски, штат Мичиган. Вырос он в соседнем городе Гейлорд, где, если верить слухам, из проволочной изгороди соорудил телеграфную линию между своим домом и домом друга. Еще он любил жонглировать, придумывать секретные коды и играть в шахматы. Он прослыл жизнерадостным гением со множеством интересов, выходявших далеко за пределы профессиональной деятельности. Он разъезжал на одноколесном велосипеде по залам Массачусетского технологического института, где получил докторскую степень по математике, а позднее и по коридорам Bell Labs, где разработал теорию информации. Еще он изобрел удивительную машину в коробке: если повернуть выключатель на боковой панели, из-под крышки появлялась механическая рука, которая возвращала его в исходное положение.³

Шеннон преуспел и в области криптографии. В 1945 году он написал засекреченный доклад «Математическая теория криптографии». Во время Второй мировой войны он проанализировал работу системы X-system, которая использовалась для безопасной голосовой радиосвязи между Франклином Д. Рузвельтом и Уинстоном Черчиллем. Шеннон математически доказал, что такую схему шифрования невозможно взломать. Шеннон также играл ключевую роль в изучении передачи данных в условиях помех, как, собственно, и назы-

³ Это устройство описано в книге фантаста Артура Кларка «Голос через океан». Писатель неоднократно бывал в гостях у Шеннона и искренне восхищался изобретением. См.: Кларк А. Голос через океан. М.: Связь, 1964. С. 172. – Прим. пер.

валась его статья 1949 года. Он показал, как отправлять цифровые сообщения по всей Солнечной системе, чтобы избежать искажений от воздействия космического шума. Именно благодаря идее Шеннона на вашем ноутбуке можно посмотреть видео, переданное с марсохода Curiosity. На фоне столь впечатляющего списка заслуг кажется вполне естественным, что имя Шеннона связано с теоремой отсчетов. Однако сама идея ему не принадлежала, о чем Шеннон не раз упоминал⁴.

«Это общеизвестный в теории связи факт, – писал он в статье 1949 года. – Теорема была первоначально дана в других формах математиками, но, несмотря на ее очевидную важность, не приводилась в литературе по теории связи».

Но «в литературе по теории связи» теорема выборки *приводилась* – в нужной форме и с полным доказательством – задолго до публикации статьи Шеннона. Котельников сделал это еще в 1933 году, более чем на десять лет раньше. Почему Шеннон не упомянул его? Возможно, дело в том, что статья Котельникова вышла в малотиражном издании материалов российской конференции и Шеннон просто не знал о ней. Но, как мы увидим дальше, реальную причину определить почти невозможно. Он мог узнать о теореме Котельникова в контексте секретных разработок, результатами которых СССР и Соединенные Штаты обменивались во время

⁴ После снятия грифа секретности доклад был переработан в статью, опубликованную в 1949 году под названием «Теория связи в секретных системах» в Bell System Technical Journal. – *Прим. пер.*

Второй мировой войны. Но последующие ожесточенные разногласия между сверхдержавами, скорее всего, помешали бы Шеннону обнародовать такое знание или получить к нему доступ.

Шеннон и Котельников (рис. 2.9) были лидерами в сфере цифровой связи в своих странах, особенно если дело касалось преодоления помех или шифрования. Оба удостоились высших государственных и научных наград. И оба сформулировали и доказали теорему выборки в том виде, в каком она используется сегодня.

Нельзя не задаться вопросом, оказал ли один влияние на другого. Любопытно, что Шеннон, младший из них, с отставанием на несколько лет повторял интеллектуальные достижения Котельникова, но я не нашел никаких доказательств, что Шеннон знал о засекреченных работах Котельникова. В любом случае не удивительно, что русские называют эту великую идею теоремой отсчетов Котельникова. А разве американцы не должны?

Разбрасывай и складывай

Вторая половина идеи Котельникова – великой теоремы отсчетов – объясняет, как из дискретных пикселей восстановить непрерывную картинку, причем с абсолютной точностью. Самое удивительное, что, похоже, в цифровом изображении почти нет информации – находящаяся между каждой

парой пикселей бесконечность аналоговых точек просто отброшена. То же самое с цифровым звуком и каждой парой сокселей. Вторая часть теоремы отсчетов сообщает нам, где найти недостающие бесконечности.

Вот как аналоговое восстанавливается из цифрового. Распределите каждый пиксель в пространстве с помощью «разбрасывателя», ключевой формы этой главы. Сложите результаты. Вот и все. Теорема отсчетов утверждает, что этот процесс «разбрасывания» и сложения полученных результатов точно воспроизводит недостающие бесконечности между пикселями! Как и в случае с другими великими математическими теоремами, такие выводы вовсе не очевидны. Мы должны верить математике.

Здесь нам снова поможет пример с волной, но для простоты мы возьмем только два центральных сокселя (рис. 2.10). (Чуть позже от них мы перейдем к пикселям.) Напомню, что соксель – это отсчет для кривой, изображающей аналоговый звук, а ее высота над нулевой линией обозначает его громкость. Таким образом, высота сокселя представляет собой громкость звуковой волны только в той точке, где сделан этот отсчет. Соксель справа будет менее громким, чем тот, что слева.



Рис. 2.9

Сначала мы разберемся с левым сокселем при помощи «разбрасывателя», изображенного на рисунке 2.1. Напомним, что его колебания той же частоты, что и у волны Фурье с самой высокой частотой исходного фрагмента. Его максимальная амплитуда на центральном выступе соответствует максимальной громкости. Для выполнения операции «разбрасывания» заменим левый соксель копией разбрасывателя (рис. 2.11). Я люблю говорить, что это «разбрасывание» превращает соксель из отсутствия формы (ничего) в показанную на рисунке форму (нечто). Его самая высокая точка – вершина центрального горба – имеет ту же громкость, что и соксель, который он заменяет. Два сокселя показаны пунк-

тиром. В частности, из рисунка видно, что высота разбрасывателя – его максимальная громкость – соответствует высоте левого сокселя. В нашем примере она составляет 80 % от полной громкости. Представьте, что у вас есть переключатель для ее регулирования.

Теперь поместите еще одну копию разбрасывателя над правым сокселем (рис. 2.12) и поворачивайте переключатель, пока его максимальная громкость не совпадет с громкостью этого сокселя, в нашем случае 50 % от полной громкости, – таким образом будет «разбросан» второй соксель.

А вот результат (рис. 2.13) сложения двух «разбросанных» сокселей. В каждой горизонтальной позиции возьмите высоты расположенных там сокселей (светло-серые), измеренные от линии нулевой громкости, и сложите их вместе, чтобы получить точку на жирной кривой.

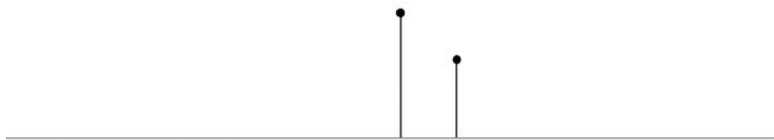


Рис. 2.10

Я до сих пор обходил стороной физическую реальность. Описанный в этой главе разбрасыватель не существует в реальном мире. Он бесконечно широк. Его колебания уходят

влево и вправо до бесконечности. Очевидно, в действительности такое невозможно, поэтому реальные разбрасыватели лишь приближенно соответствуют идеальному.

Особенно часто используется кубический разбрасыватель, отличающийся практичностью и удивительной точностью (рис. 2.14). Обратите внимание, насколько он похож на среднюю часть идеального разбрасывателя, включая наличие двух отрицательных лепестков (ниже линии нулевой громкости). Кубический разбрасыватель равен нулю везде, кроме двух отсчетов слева и двух справа от центрального отсчета – того, который «разбрасывается» им самим. Другими словами, он имеет конечную ширину, поэтому может существовать в реальном мире.

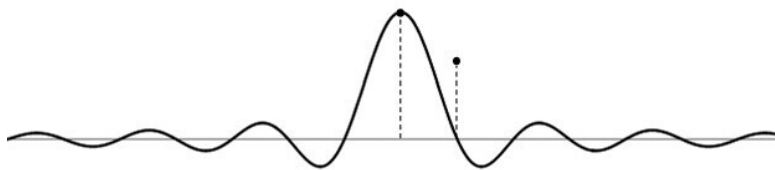


Рис. 2.11

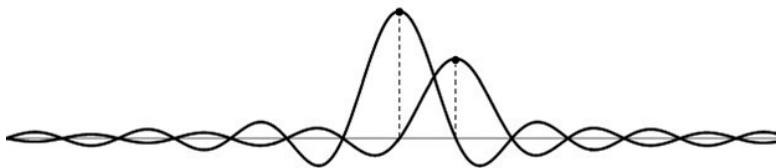


Рис. 2.12

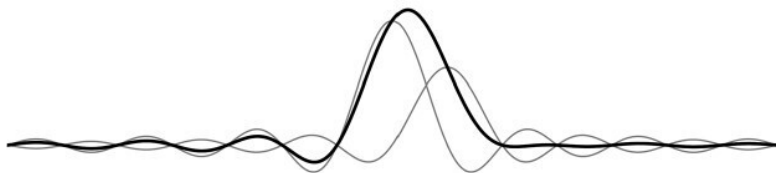


Рис. 2.13

До сих пор я описывал одномерное разбрасывание. Амплитуда звуковых волн изменяется только в одном измерении (во времени), поэтому приведенные выше иллюстрации подходят для сокселей, но не для пикселей. Разбрасыватель для пикселей должен работать в двух измерениях, поскольку изображения простираются (в пространстве) в двух измерениях – горизонтальном и вертикальном. Разбрасыватель пикселей должен «разбросать» каждый гвоздь (пиксель) из нашей воображаемой доски с гвоздями так, чтобы каждый «разбросанный» пиксель внес свой вклад в двумерную поверхность, которую мы увидим. Можете считать

предыдущие иллюстрации точными чертежами поперечного сечения разбрасывателя пикселей в горизонтальном измерении, а в вертикальном измерении оно будет точно таким же. Но можно сделать нагляднее.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.