Майкл
Брукс

Искусство большего

Как математика создала цивилизацию

CoRpvS

ЭЛЕМЕНТЫ 2.0

Книжные проекты
Дмитрия Зимина

Книга для тех,
кто любит математику, и тех,
кто всегда ее ненавидел

Майкл Брукс

Искусство большего. Как математика создала цивилизацию

Серия «Элементы 2.0»

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=70297558
М. Брукс. Искусство большего. Как математика создала цивилизацию: ООО «Издательство Аст»; Москва; 2024
ISBN 978-5-17-148081-3

Аннотация

От подсчета налогов до математического анализа, от архитектурных расчетов до выведения спутников на орбиту Земли – математика всегда определяла развитие человечества, от древних царств и до сегодняшнего дня. Но как шло это развитие? Сколько великих умов посвятили всю жизнь математике? Как именно математика и достижения гениев прошлого позволяли банкам наращивать свой капитал, а военачальникам – выигрывать битвы и целые войны? Майкл Брукс приглашает читателя в увлекательное путешествие по страницам истории этой удивительной науки.

В формате PDF A4 сохранен издательский макет.

Содержание

Майкл Брукс
Искусство большего. Как математика создала цивилизацию

Michael Brooks

The Art of More. How Mathematics Created Civilization

Издательство CORPUS ®

* * *

От автора

Здесь рады всем – и тем, кто любит математику, и тем, кто всегда ее ненавидел, и тем, кто просто хочет лучше в ней разобраться. У всех свои взаимоотношения с этим предметом, и мне с самого начала хотелось сделать эту книгу доступной для каждого. В связи с этим я старался писать как можно понятнее, но решил, что порой читателю не будет лишним и приложить немного усилий, чтобы действительно разобраться в вопросе. Это значит, что здесь есть и кое-что из настоящей математики: графики, уравнения и расчеты, которые я постараюсь вам разъяснить. Но если вы к такому не готовы и не хотите напрягаться – просто пропускайте эти фрагменты. Жизнь и так слишком коротка.

Введение. Почему умение работать с цифрами – величайшее достижение человечества

В июне 1992 года американский исследователь Питер Гордон посетил деревушку из нескольких хижин, покрытых пальмовыми листьями, на берегу реки Маиси в бразильской Амазонии[1]. Там он встретился с Дэниелом Эвереттом – христианским миссионером, который жил вдали от цивилизации среди народа пирахан. Эверетт рассказал Гордону, что пирахан довольно небрежны в отношении чисел: по сути, они не утруждают себя счетом. Заинтригованный, Гордон приехал разузнать, как такое возможно.

Он решил провести эксперимент с использованием пальчиковых батареек, которые привез с собой. Выкладывая по несколько батареек в линию, он просил пирахан выложить рядом еще одну линию с таким же числом батареек. С линиями из одной, двух и трех батареек они справлялись без труда. Повторить линию из четырех, пяти или шести батареек им было уже сложно. Когда количество батареек возрастало до десяти, задача становилась практически невыполнимой. Аналогичная проблема возникала, когда пирахан просили

---

[1] Gordon P. *Numerical cognition without words: evidence from Amazonia*. Science 306. 5695 (2004): 496–99.

воспроизвести символы, нарисованные на бумаге. Один-два символа они копировали с легкостью, но больше шести повторить не мог никто. Гордон пришел к выводу, что пирахан вообще не умели работать с цифрами – возможно, потому что у них не было в этом нужды. При их образе жизни мозг просто не находил причин формировать концепцию чисел.

Большинству из нас удивительно, что люди вполне могут обходиться без чисел. Дело в том, что мы сами не отдаем себе отчет в том, насколько глубоко числа укоренились в нашей повседневной жизни. Однако, если не заострять на этом внимание, мы даже не задумываемся о том, что числа лежат в основе нашего образа жизни, наших институтов и нашей инфраструктуры. О чем бы ни зашла речь – о бизнесе, жилье, медицине, политике, войне, сельском хозяйстве, искусстве, путешествиях, науке, технологиях, – почти все аспекты нашего существования зиждятся на математическом фундаменте. И это удивляет лишь сильнее, если осознать, что математики могло и не быть.

От природы мы ничуть не больше других видов способны работать с цифрами[2]. Люди рождаются лишь с тем, что называется “примерным арифметическим мышлением”[3]. Это значит, что в изначальном состоянии человеческий мозг не

---

[2] Everett C. *Numbers and the Making of Us: counting and the course of human cultures*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2019.

[3] Nuwer R. *Babies are born with some math skills*. Science, 2013, *www.sciencemag.org/news*/2013/10/*babies-are-born-some-math-skills.*

утруждает себя подсчетами, когда количество единиц чего-либо превышает три. Увидев четыре яблока, ребенок автоматически сочтет, что их “много” или “больше”. От природы мы ведем счет так: “1, 2, 3, больше”. Мозг крыс, шимпанзе, птиц и обезьян также применяет примерную систему счисления. Если вознаградить крысу, когда она пять раз нажмет на рычаг, то она будет время от времени возвращаться к аппарату и нажимать на рычаг примерно пять раз, надеясь снова получить лакомство. Людям удалось обучить шимпанзе выполнять более сложные задачи с числами – например, запоминать последовательности чисел, – и порой шимпанзе справляются с ними лучше, чем неподготовленные взрослые люди. Но в процессе обучения без вознаграждений не обойтись: шимпанзе не станут заниматься математикой в свое удовольствие. Вы тоже пришли к цифрам не сами: вы научились считать под давлением социума. Любопытно, что такое давление проистекает из глубоко укоренившейся в культуре мудрости, которая гласит, что математика – вещь нужная.

Живший в эпоху Тюдоров математик и мистик Джон Ди называл математику “странным соседством сверхъестественного, нетленного, философского, простого и неделимого с естественным, бренным, здравым, сложным и делимым”[4]. Казалось бы, это чепуха, но математика действительно сверхъестественна, поскольку мы применяем ее, чтобы

---

[4] Dee J. *The Mathematicall Praeface to Elements of Geometrie of Euclid of Megara, www.gutenberg.org/files/*22062/22062-*h*/22062-*h.htm.*

выйти за границы естественного. Развитие математики позволяет нам изучать и разбирать природные закономерности и симметрии и, подобно богам, перестраивать их под собственные нужды. Благодаря математике мы меняем окружающий мир, чтобы нам, людям, жилось лучше. Сперва мы научились считать до четырех, а в итоге обнаружили, что создали цивилизации. Постигая искусство “большего”, наш мозг учится работать со сложными абстракциями. Он осваивается в мире, где числа применимы не только к вещам, требующим счета, но также к фигурам, точкам, линиям и углам, – иными словами, в сфере геометрии. Это наделяет нас способностью воссоздавать – на бумаге, на деревянной сфере или просто в голове – такой огромный и сложный объект, как Земля, и учиться ориентироваться на нем. Мы также можем воссоздавать числа – знакомые и незнакомые нам – в качестве символов и манипулировать ими, чтобы управлять миром и перестраивать его, делая поразительные успехи в упорядочивании, оптимизации и транспортировке. Это, если вы еще не поняли, алгебра. Мы можем даже проводить расчеты, чтобы прогнозировать, какое будущее наступит под действием происходящих вокруг изменений. Эта сфера называется математическим анализом, и она позволяет нам достигать множества целей, от формирования рыночного капитализма до полетов на Луну.

Мы осваиваем эту математику – по крайней мере, как предполагается – на ранних этапах жизни. В школе нас уверяют, что математика – важнейший навык, без которого не обойтись, если мы хотим добиться успеха. И мы покорно, хотя частенько и неохотно, открываем для себя математические инструменты и учимся ими пользоваться. Некоторым это нравится, но большинству – нет. В какой-то момент почти все опускают руки.

Мало кто после этого продолжает изучать математику. В последующие годы обретенные в муках навыки притупляются, и лишь самые базовые из них остаются в нашем распоряжении. Без помощи технологий – например, калькулятора в мобильном телефоне, без которого сегодня не разделишь на компанию ни один ресторанный счет, – мы умело складываем и вычитаем лишь относительно небольшие числа, да еще, возможно, немного умеем умножать и делить. Остальное улетучивается. Порой у нас даже развивается “математическая фобия”, когда мы всеми силами стараемся не допускать столкновения с цифрами. А иногда мы просто приходим к выводу, что математика не поддается нашему пониманию, и утверждаем, что это “не наше”.

Если вы сейчас узнали себя, я надеюсь, что вы перемените мнение, прочитав эту книгу. Математика – выдающееся достижение, которое доступно всем, как бы хорошо (или плохо) люди ни владели цифрами. Тысячелетия применения математики человеческим мозгом значительно облегчают нам сегодня жизнь, и мы все имеем право приобщаться к этой науке, каким бы ни был уровень нашего образования. Разве у вас не должно быть возможности увидеть, что математический анализ Ньютона красив, как Тадж-Махал, и понять, почему вавилонская алгебра не менее прекрасна, чем вавилонские Висячие сады? В полной мере понимая математику, мы можем не только сравнить ее с традиционными красотами, но и узнать, как мы создали вещи, которые считаем красивыми. Куда бы ни упал наш взгляд – на искусство или на архитектуру, на картину Вермеера или на величественный собор Святой Софии в Стамбуле, – мы обнаружим, что в основе всего этого лежит математика. Она влияет не только на эстетические сферы нашей жизни, ведь с математикой неразрывно связана и сама история человечества. Колумб не приплыл бы в Америку, если бы люди не знали, какими свойствами обладают треугольники, а современный корпоративный мир показывает, какие возможности открывает работа с числами. Математика дала нам зубило, которое определило очертания эпохи Возрождения, и оружие, обеспечившее нам целые столетия военных успехов. Математика – переводчик, который позволил людям, говорящим на разных языках, наладить взаимовыгодную торговлю, и топливо, которое доставило нас на Луну. Она – искра, которая электрифицировала мир в начале XX века, и сила, которая стояла за каждым правителем древнего мира. Неудивительно, что 4 тысячи лет назад царя Шульги, властителя Ура, почитали именно за способности к математике.

В школе я не узнал ничего из этого. Я научился сдавать экзамены по математике и время от времени применял свои навыки, чтобы рассчитать ускорение машины или силу, необходимую, чтобы вывести ракету на орбиту. Но я не узнал, чем мы как вид обязаны математике и как вообще мы ее изобрели. Но еще не вечер. Мы еще можем отыскать в математике и радость, и смысл, даже если прошел не один десяток лет с тех пор, как мы потеряли надежду изучить ее тонкости.

Я помню, когда и где достиг своего математического потолка: был октябрь 1987 года, и я сидел в аудитории Сассекского университета на юге Англии, только поступив на физический факультет. Не помню точно, какой была тема, но эта лекция была первой из курса по изучению продвинутых математических техник. Мне было очень тяжело, а предмет не входил в число обязательных, поэтому я просто ушел с занятия. У каждого из вас найдется своя подобная история, но в какой-то момент все мы вышли из кабинета математики в последний раз. К счастью, дверь за нами не закрылась полностью. Давайте войдем в нее снова.

Глава 1. Арифметика. История цивилизации

В процессе эволюции у людей не возникло непреодолимого желания считать. Но стоило нам изобрести числа и арифметику, как мы попали в зависимость от них. Числа позволили людям осуществлять управление, взимать налоги и торговать друг с другом, что открыло им возможность жить в больших взаимозависимых сообществах. В конце концов арифметика и ее производные – дроби, отрицательные числа и понятие нуля – стали движущей силой экономического и политического успеха: те, кто умеет обращаться с числами, определяют будущее рабочих, стран и всей планеты. А началось все с интеллектуального скачка к числу 4.

В первой половине XV века банк Медичи был гордостью Флоренции на зависть всей Европе[5]. Его успех объяснялся просто: Джованни Бенчи, управлявший банком, педантично вел бухгалтерию и всегда все делал по правилам. Он каждый год проверял бухгалтерские ведомости всех филиалов банка, оценивал финансовое положение должников и определял вероятность неисполнения платежных обязательств. Если бы

---

[5] Brooks R. *Bean Counters: the triumph of the accountants and how they broke capitalism.* London: Atlantic Books, 2019.

вы управляли одним из филиалов банка и Бенчи обнаружил бы, что у вас не сходится баланс, он вызвал бы вас к себе и разорвал на куски. А потом, в 1455 году, Бенчи умер, и все развалилось.

Сотрудники банка Медичи вдруг освободились от пристального контроля Бенчи и стали предлагать вкладчикам слишком щедрый доход, все равно как если бы современный банк обещал 10 % дохода с любых инвестиций. Чтобы обеспечивать гарантированные процентные платежи, банк начал проводить нездоровую политику кредитования. Он предлагал ссуды под непомерные проценты, и европейские короли и аристократы, которые нуждались в средствах для ведения войн, соглашались на условия Медичи, не собираясь выплачивать долги. У банка не было возможности принудить кредиторов к возврату ссуд, и деньги утекали. Тем временем совладельцы банка ориентировались на баланс, раздутый за счет кредитов, которые никто не планировал возвращать, и пускали несуществующую прибыль на личные расходы. Они жили на широкую ногу, ни в чем себя не ограничивая, и наличность в банке таяла. В 1478 году банк Медичи оказался на грани банкротства. Разоренный Лоренцо Медичи, правнук основателя банка, попытался поправить свое положение, присвоив себе деньги вкладчиков. Разгневанные флорентийцы в 1494 году штурмовали дворец Медичи и сожгли все банковские книги. В этом пламени сгорело и вековое господство европейской культурной, политической и финансовой столицы.

В следующий раз история продемонстрировала колоссальную силу бухгалтерского учета в период Великой французской революции. Взрыв случился, когда со своего поста был смещен счетовод Жак Неккер, который пытался наладить разрушенную финансовую систему Франции и сократить гигантский объем государственного долга. В процессе он изобличил расточительность французского королевского двора. В конце концов деятельность Неккера стала вызывать недовольство со стороны правящих классов, которые теряли деньги в результате его реформ. Неккер был смещен с поста министра финансов, но приобрел множество верных и опасных сторонников.

Историк Франсуа Минье описывает момент, который дал толчок к революции: импульсивный Камиль Демулен стоит на столе, держа в руке пистолет[6]. “Граждане! Нельзя терять ни минуты!” – восклицает молодой бунтарь. Отставка Неккера, говорит Демулен, оскорбляет каждого патриота Франции и каждого ставит под угрозу. “Остается лишь одно – взяться за оружие!” Услышав этот призыв, толпа устремляется на улицы. На плечах у людей – бюсты смещенного министра. “Ни один кризис не обходится без лидера, имя которого становится знаменем его сторонников, и пока народ боролся со двором, таким лидером был Неккер”.

---

[6] Mignet F. A. M. A. *History of the French Revolution from* 1789 *to* 1814, *www.gutenberg.org/files/*9602/9602–8*.txt.*

Кампанию Неккера мы вряд ли сразу сочли бы революционной: он просто хотел свести баланс. Неккер отметил, что английский парламент обнародует свои доходы и расходы и финансы Англии в порядке, несмотря на крупные ссуды на ведение заграничных войн. Он считал, что Франция должна стремиться к такой же прозрачности. Сведенный баланс, говорил Неккер, есть основа этического, преуспевающего, счастливого и могущественного правительства. В связи с этим он пытался заменить множество французских финансовых реестров одним, который контролировал бы сам. Его идея не получила поддержки у тех, кто стоял у власти, но оказалась чрезвычайно популярной среди тех, кто влияния не имел. В результате, как выразился историк Джейкоб Солл, "французская революция началась отчасти как борьба за подотчетность правительства и точность цифр"[7].

Зарубежным финансовым системам завидовала не только Франция. Столпы экономики США – налоговые поступления, доллар, Центральный банк – были в общих чертах скопированы с голландских и английских банковских практик. В то время в Америке банков не было, и страна тонула в долгах. Банки, как Александр Гамильтон отметил в 1781 году, были "лучшим из двигателей, изобретенных для развития торговли"[8]. Гамильтон утверждал, что свобода от бри-

---

[7] Soll J. *The Reckoning: financial accountability and the rise and fall of nations.* New York: Basic Books, 2014.

[8] Founders Online. *From Alexander Hamilton to Robert Morris, [*30 *April* 1781*],*

танского правления придет тогда, когда Америка разберется в бухгалтерских ведомостях и станет вести их самостоятельно. "Только порядком в финансах – и возвратом доверия общества, – а не победами в битвах мы сумеем наконец достичь своей цели, – сказал он. – Своей способностью мобилизовать огромные силы для ведения множества славных и успешных войн Великобритания обязана огромной кредитной базе, сформированной на этом фундаменте. Только этим она и угрожает нашей независимости".

Став первым министром финансов США, Гамильтон принял все необходимые меры и вытащил молодое государство из пучины банкротства. Уже к 1803 году финансовое чутье Гамильтона позволило США выпустить достаточное количество государственных облигаций, чтобы купить у Франции Луизиану и увеличить площадь страны вдвое. Возможно, вам мюзикл "Гамильтон" нравится как ода одному из отцов-основателей США, но историки экономики видят в нем хвалу бережливости. А математики – свидетельство того, какую силу дает умение работать с числами.

Учимся считать

Не стоит принимать математику как должное. Современный человек – *Homo sapiens*, "человек разумный", – существует около 300 тысяч лет, а самым древним из найденных

---

*http://founders.archives.gov/documents/Hamilton/*01–02-02–1167.

рукотворных артефактов не менее 100 тысяч лет. Но самому раннему надежному свидетельству о том, что человек научился считать, лишь около 20 тысяч лет. Длинные насечки на кости Ишанго, обнаруженной в одноименном местечке на территории современной Демократической Республики Конго, сгруппированы в три колонки, каждая из которых поделена на отрезки. Хотя мы ничего не можем сказать наверняка, логично предположить, что одна насечка – это “один”. Две насечки – два. И так далее. В совокупности насечки напоминают систему счисления для расчета лунных циклов[9].

Насечки на кости были созданы относительно недавно, и это наталкивает на мысль, что человек довольно поздно научился считать и что этот навык не является неизбежным следствием развития интеллекта. Мозг у вас в голове, по сути, не отличается от мозга первого *Homo sapiens*, и кажется, что на протяжении большей части истории нашего вида человек разумный вообще не связывался с цифрами.

Однако как только мы освоили счет, преимущества стали очевидны. Именно поэтому вы, вероятно, даже не помните, как учились считать. Умение считать настолько ценится в большинстве человеческих культур, что обучение ему начи-

---

[9] Существует другая кость, которая может претендовать на статус более древнего математического артефакта. Это кость Лебомбо, которой около 43 тысяч лет. На ней видны насечки, которые, возможно, были знаками некоторой системы счисления. Впрочем, это подвергается большим сомнениям, и южноафриканский археолог Питер Бомонт, обнаруживший кость, вовсе не утверждает, что ее использовали в качестве инструмента для ведения подсчетов.

нается еще до того, как у ребенка в голове откладываются первые долговременные воспоминания. И я готов поспорить, что вы учились считать на пальцах[10].

Впервые я всерьез задумался о счете на пальцах – не считая того неловкого момента, когда понял, что считаю на пальцах у всех на глазах, в супермаркете, пока пытался вспомнить, сколько гостей придет на ужин, – когда посмотрел бунтарский военный фильм Квентина Тарантино "Бесславные ублюдки". В одной из сцен фильма британец притворяется немцем в подпольном баре. Он жестом просит бармена принести три стакана и поднимает для этого указательный, средний и безымянный пальцы. Немецкий офицер, сидящий с ним за одним столом, сразу раскусывает собутыльника. "Вы только что себя выдали, капитан", – говорит он.

Немцы показывают "один" большим пальцем, поэтому немец заказал бы три стакана, подняв большой, указательный и средний пальцы[11]. Азиаты считают на пальцах иначе. Моя подруга Сонали, выросшая в Индии, училась считать по отдельным фалангам. Торговцы из индийского штата Махараштра используют иную систему[12]. Они начинают с боль-

---

[10] Fehr T. et al. *Common brain regions underlying different arithmetic operations as revealed by conjunct fMRI-BOLD activation*. Brain Research. 1172 (2007): 93–102.

[11] Pika S. et al. *How to order a beer: cultural differences in the use of conventional gestures for numbers*. Journal of Cross-Cultural Psychology 40. 1 (2009): 70–80.

[12] Ifrah G. *From One to Zero: a universal history of numbers*. New York: Penguin Books, 1987.

шого пальца, как немцы, но когда доходят до пяти, поднимают большой палец другой руки (обычно правой), чтобы обозначить, что одна “пятерка” уже собрана. Дальше они снова сжимают левый кулак и поднимают большой палец, показывая “шесть”.

Представьте, что заключаете сделку с торговцем из Махараштры. Сначала вы, наверное, придете в замешательство, но вскоре поймете, сколько нужно заплатить, даже не прибегая к помощи языка. Умение считать на пальцах позволяет нам осуществлять торговлю, не имея общего письменного или разговорного языка. Достаточно, чтобы обе стороны понимали, о какой валюте идет речь, и знали числа от единицы до сотен и тысяч.

Именно поэтому освоение счета на пальцах было основополагающим элементом образования почти для всех членов древних обществ. Даже самые изолированные общества осуществляли обмен с путешествующими торговцами, которые далеко не всегда говорили с ними на одном языке. В сочинениях, созданных в V и IV веках до нашей эры, Аристофан упоминает, что счет на пальцах широко распространен в Древней Греции и Персии. Древнеримский ритор Квинтилиан отмечает, что стыдно должно быть тому законнику, который плохо владеет счетом на пальцах. Ацтеки изображали людей, показывающих числа пальцами, а в средневековой Европе счет на пальцах был настолько вездесущ, что в прославленный учебник математики “Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций”, написанный в 1494 году Лукой Пачоли, вошло полное иллюстрированное руководство, позволяющее овладеть этим искусством. Даже в конце XVIII века немецкий путешественник Карстен Нибур описывал, как торговцы на азиатских рынках тайно договариваются о ценах, особым образом хватая друг друга за пальцы. Чтобы не посвящать никого в свои дела, они прятали руки в широких рукавах или скрывали их под отрезом ткани, наброшенным на запястья.

Поскольку способы обозначения чисел в разных культурах всегда различались, при обучении будущим дельцам приходилось уделять большое внимание жестам. Чтобы осваивать их было легче, поэты и учителя создавали подсказки в стихах и прозе. Вот, например, одна из древнего арабского мира: “Халид взял с собой 90 дирхамов, а когда вернулся, у него осталась лишь треть”. Хотя нам это мало о чем говорит, арабы показывали 90, полностью согнув указательный палец у основания большого. Треть от 90 – это 30, и здесь знаком было гораздо более широкое кольцо, образуемое при соприкосновении кончиков большого и указательного пальцев. В подсказке содержался намек на то, что Халида анально изнасиловали и ограбили. Подозреваю, что теперь вы на всю жизнь запомните, как в древности показывали 90 и 30 на пальцах.

Причина столь широкого распространения счета на пальцах во многом совпадает с причиной, по которой люди прекрасно научились работать с числами, как только осознали их ценность. Она такова: в первые пять лет жизни мозг человека посредством игры, экспериментов и стимуляции формирует так называемый пальцевой гнозис. Это способность воспринимать и ощущать каждый палец по отдельности. Через некоторое время в мозге создается внутренний образ пальцев, и этот образ помогает человеку приступить к работе с числами[13]. Прелесть пальцев в том, что их можно видеть и ощущать, и ими можно двигать. Они собраны в две группы по пять единиц, каждую из которых можно привести в разное положение при сгибании. Если бы вам нужно было изобрести инструмент, чтобы присвоить понятие “сколько?” к группе объектов перед вами, вам сложно было бы придумать что-то лучше своих пальцев.

При сканировании мозга мы видим, что, когда большинство из нас решает математические задачи – например, вычитая одно число из другого, – в дело вступает область мозга, которая работает с данными, получаемыми от пальцев. Если числа велики, активность в этой области становится более очевидной. Любопытно, что, если вам особенно хорошо дается вычитание, активность оказывается не такой высокой: иными словами, связи в вашем мозге едва напрягаются. Но стоит также отметить, что если в детстве вас не подталкивали использовать пальцы в играх – особенно в считалках, на-

---

[13] Berteletti I., Booth J. R. *Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems*. Frontiers in Psychology. 6 (2015).

пример “Раз-два-три-четыре-пять, вышел зайчик погулять”, – вы, возможно, так и не “освоили” числа[14]. Вы представляете их иначе, чем другие люди. Это одна из причин, по которым кое-кому не дается математика.

Может показаться, что, освоив счет на пальцах, человек готов сделать следующий шаг и начать записывать числа. Но, раз мы могли и не начать работать с числами, мы уж точно могли и не начать их записывать. В конце концов, когда торговля осуществлялась на месте, о цене договаривались лично, а товары передавались незамедлительно, записывать транзакции не было необходимости. Что же подтолкнуло нас к записи чисел? Записывая числа, мы могли прогнозировать небесные явления, которые, возможно, имели религиозное значение, – скажем, новолуния и солнечные затмения. А еще мы могли производить учет запасов и уплаченных цен, а также фиксировать обязательства, связанные с будущими покупками и продажами. Вероятно, числа начали записывать в рамках религиозных практик, но в итоге это также позволило нам вывести на новый уровень торговлю. Как бы то ни было, запись чисел привела нас прямо к сегодняшнему процветанию.

---

[14] Butterworth B. *The Mathematical Brain*. London: Macmillan, 1999.

Учетная революция

Мы точно не знаем, кто из людей раньше всех стал записывать числа. Вполне возможно, что кость Ишанго была создана значительно позднее начала математического путешествия человечества. Но две вещи мы знаем наверняка. Во-первых, существовало множество вариантов записи чисел, от костей с засечками до инкских узелков, вавилонской клинописи на глине, египетских чернил на папирусе и даже до электрического напряжения в микросхемах, изобретенных в XX веке. Во-вторых, новая способность к осуществлению финансового учета оказалась революционной. Ведение бухгалтерии, возможно, кажется вам просто неприятной обязанностью, которую вы с радостью перекладываете на чужие плечи, но после ее изобретения человеческая культура кардинально изменилась.

Самые ранние свидетельства коммерческого счета датируются примерно 4 тысячами лет назад, когда месопотамские торговцы начали записывать договоренности о продаже овец. Каждой договоренности соответствовал глиняный шарик. Шарики запечатывались в полую сферу, на которой отмечалось их количество, а затем сферу обжигали, чтобы запись невозможно было изменить. Это была страховка на случай, если людей подведет память или если они намеренно попытаются нарушить договоренности.

Со временем на смену этой системе пришла более простая: засечки на обожженной глиняной табличке. Теперь нетрудно было увидеть, какими были договоренности и что именно было куплено, продано и оплачено. К тому моменту люди уже стали понимать, что работа с числами не только дает преимущества в торговле: она дает власть.

В 2074 году до нашей эры царь Шульги, правивший Уром, который находился на юге современного Ирака, создал, по выражению историков, “первое математическое государство”[15]. Шульги начал с военной реформы, за которой последовала административная. В соответствии с ними писцам Ура было поручено вести сложную перепись всего, чем богато царство. Надзиратели, контролировавшие рабочий класс Ура, оставили записи о количестве отработанных часов, болезнях, отсутствиях на рабочем месте и производительности труда заимствованных и предоставленных в аренду рабов. Если они не могли показать, что каждый из подотчетных им работников за месяц отработал 30 дней (вне зависимости от продолжительности месяца), то государство взимало с них плату за недоработки. Если писец-надзиратель умирал, не выплатив долг, обязательства переходили к его родственникам. Система отчетности царя Шульги была основана на неожиданном принципе: она должна была максимально облегчить выявление попыток обмануть государство.

---

[15] Høyrup J. *State, “justice”, scribal culture and mathematics in ancient Mesopotamia: Sarton Chair Lecture*. Sartoniana. 22 (2009): 13–45.

Оказывается, аудит – истинная колыбель цивилизации.

Если Ур был первым математическим государством, то Шульги стал первым богом-математиком. Он провозгласил себя богом на двадцать третьем году царства. После этого его подданным полагалось почитать его и восхвалять его качества, в особенности его мастерское умение работать с цифрами. До нас дошли тексты гимнов с хвалами Шульги, и одним из его божественных атрибутов, очевидно, была прекрасная математическая подготовка в "доме табличек", где он научился складывать, вычитать, считать и вести учет.

Преимущества математики как основы царства Шульги были так велики, что в следующем поколении математика стала в этом государстве величайшим из ремесел и важнейшим элементом подготовки писцов. К началу 2-го тысячелетия до нашей эры квалифицированный писец должен был уметь читать и писать по-шумерски и по-вавилонски, а также иметь музыкальные и математические навыки. Нужная писцам математика не сводилась к простому бухгалтерскому тасованию цифр, а предполагала осуществление чрезвычайно сложных – и как будто бы бесполезных – вычислений. По сути, писцам нужно было решать такие, например, задачи: "Я сложил периметр, диаметр и площадь круга и получил 115" – каков его радиус?[16] Это была математика ра-

[16] Høyrup J. *On a collection of geometrical riddles and their role in the shaping of four to six "algebras"*. Science in Context. 14, no. 1–2 (2001): 85–131. (Ответ: 4,874. Его можно вычислить с помощью квадратного уравнения, с которым мы еще не познакомились.)

ди математики, которая считалась одной из “добродетелей”. Только владея математикой, образованный писец мог считать себя мастером *nam-lú-ulu*, или, в переводе с шумерского, “искусства быть человеком”. Иными словами, в систему образования математика попала через учебную программу гуманитарных наук.

В таком случае не приходится удивляться тому, что мы обнаружили не один десяток тысяч древних глиняных табличек, на которых были не только расчеты. Многие из них использовались как вспомогательные математические инструменты: таблицы умножения и деления, списки квадратов чисел (произведений, получаемых при умножении числа на само себя) и обратного – квадратных корней. У нас имеются глиняные записи о том, как работать с дробями и решать алгебраические задачи, а также как использовать такие геометрические инструменты, как приблизительное значение числа пи и квадратный корень из 2. В последующих главах мы поговорим о важности этих инструментов и техник, а пока достаточно лишь сказать, что в те времена, когда зародилось то, что мы называем цивилизацией, числа были краеугольным камнем общества.

Искусство счета наделило нас исключительной силой. Шульги понимал, насколько полезна математика, и благодаря этому – по крайней мере, отчасти – его царство достигло беспрецедентного могущества. Он завершил начатое при его отце строительство Великого зиккурата в Уре, проложил разветвленную дорожную сеть и обеспечил расширение торговли с арабскими и индийскими сообществами. Все это стало возможным не потому, что математику изобрели, а потому, что ей нашли *применение* – в политических целях. И вскоре эта стратегия оправдала себя в других местах.

Возможно, мы уделяем слишком много внимания математической смекалке шумеров и вавилонян просто потому, что их привычка к записи повседневной жизни на глиняных табличках обеспечила нас множеством доступных артефактов. Общества, которые опирались на устную традицию, плохо представлены в нашем рассказе о том, как математика вплеталась в ткань любой цивилизации. Взять, к примеру, народ аканов из Западной Африки. В доколониальный период они пользовались сложной математической системой при взвешивании золота, используемого в торговле. В ней было два компонента: один – для работы с арабской и португальской системами весов, а второй – для работы с голландскими и английскими мерами. Ученые, которые сумели ее воссоздать, изучив артефакты, хранящиеся в музеях по всему свету, полагают, что ее стоит внести в список Всемирного наследия ЮНЕСКО за одну только головокружительную сложность [17].

Неудивительно, что капитаны невольничьих судов, заключавшие сделки с африканскими работорговцами, называли

---

[17] Crappier J.-J. et al. *The Akan Weighing System restored after* 120 *years of oblivion. A metrological study of* 9301 *geometric gold-weights*. Colligo 2. 2 (2019): 9–22.

тех “мастерами арифметики”[18]. В одном источнике говорится: “У торговца может быть рабов десять на продажу, и за каждого из них он просит десять разных вещей. Он мгновенно в уме переводит их цену в слитки, монеты, унции в зависимости от того, какое платежное средство более распространено в той части страны, где он проживает, и тотчас подбивает баланс”. Тот факт, что инструкции по применению этой системы расчетов передавались из уст в уста, производит еще более глубокое впечатление, но также значит, что как раз работорговля и подрывала ее использование. Невозможно установить, сколько великих математических умов было перевезено в Европу, в Северную и Южную Америку и на Карибские острова, где им больше не нашлось применения. В результате богатые африканские математические традиции так и не были оценены по достоинству – за исключением разве что тех, которые получили распространение в Древнем Египте.

Польза дробей

Если оценивать названия книг, то “Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей” – это отпад. По названию можно подумать, что это книга из сырого подвала какой-нибудь лавки колдовских товаров, в которой объяс-

[18] Scripture E. W. *Arithmetical prodigies.* American Journal of Psychology. 4, no. 1 (1891): 1–59.

няется, как призывать духов для осуществления всяческих козней. Но это не так. На самом деле это древнеегипетский учебник математики.

На Западе он более известен как папирус Ринда – по фамилии шотландского юриста, который около 1858 года приобрел его в Фивах. Большая часть рукописи (длина всего документа составляет 5,5 метра) хранится в Британском музее в Лондоне. Остаток – в Бруклинском музее в Нью-Йорке. Она была создана древнеегипетским писцом Ахмесом около 3,5 тысячи лет назад. Ахмес (имя которого значит “рожденный на луне”) скопировал тысячелетний текст с описанием математических приемов, применявшихся древнеегипетскими жрецами.

Древнеегипетское царство зависело от расчетов, связанных с ежегодным разливом Нила. Инженеры снимали показания глубиномеров и сообщали об изменениях уровня воды. Жрецы-астрономы вели календари, чтобы египтяне могли подготовиться ко дню гелиакического восхода Сириуса – моменту, когда звезда оказывалась достаточно далеко от Солнца относительно Земли, чтобы снова появиться на земном небосводе. В этот день заканчивалась подготовка к очистке каналов и ремонту стоков.

Благодаря расчетам египтяне прекрасно справлялись с тем, чтобы направлять разливающиеся воды Нила в каналы и на сельскохозяйственные угодья, где плодородные наносы оседали на земле. Как только вода уходила в землю или возвращалась по каналам обратно в основное русло реки, начинался новый земледельческий сезон, но сначала происходили разделы и перераспределения угодий.

При разливе вода смывала все границы и межевые отметки, поэтому писцам приходилось записывать, сколько земли домохозяйства обрабатывали в прошлом году. После этого администраторы выделяли им эквивалентный участок только что удобренной земли, площадь которого определяли с помощью действий, которые мы сегодня сочли бы примитивной арифметикой. Они, вероятно, были довольно примитивны и для древних египтян, но явно считались достаточно важными, поскольку писцы регулярно копировали ветшающие документы с описанием процесса.

Значительная часть папируса Ринда, по сути, представляет собой введение в науку о дробях. Возможно, вы удивитесь, узнав, что дроби изобрели не чтобы пытать школьников, а чтобы управлять экономикой. Цивилизации, которой нужно было знать, сколько зерна содержится в цилиндрическом хранилище, и выполнять волю правительства при разделе земли, распределении продовольствия и оплате труда, целых чисел – тех, что нам уже знакомы, – было недостаточно.

С помощью целых чисел наш мозг соотносит объекты окружающей среды с абстрактными понятиями “единицы”, “двойки” и так далее, и именно ими мы оперируем, когда считаем на пальцах (которые, если нам повезло, существуют также в виртуальной форме у нас в голове). Дроби – дело другое. Это способ делить целые числа, сравнивая одно с другим. И возни с ними немало: идея о том, что целые числа делятся на части, – ужасающий скачок вперед для мозга, который не был приспособлен в рамках эволюции представлять такие вещи.

Если в школе дроби вам никак не давались, вы совсем не одиноки. Хорошую компанию вам, например, составил бы Леонардо да Винчи. Несмотря на свои великие достижения в искусстве, инженерии и астрономии, он совершенно не умел работать с дробями[19]. Его записи показывают, что он ошибался всякий раз, когда ему приходилось перемножать их или делить. Так, он просто не мог поверить, что частное при делении на дробь величиной меньше единицы (например, на 2/3) оказывается больше делимого[20].

---

[19] Duvernoy S. *Leonardo and theoretical mathematics*. Nexus Network Journal. 10,1 (2008): 39–49.

[20] Если вы сочувствуете Леонардо, в этом нет ничего удивительного. Разумеется, можно просто принять, что при делении на число меньше единицы частное оказывается больше делимого. Не помешает, впрочем, разобраться в этом на примере. Допустим, мы делим 10 шоколадок между 5 хоккейными командами. Каждая команда получает по 2 шоколадки. Теперь допустим, что мы делим шоколадки между 2 командами. В таком случае каждая команда получает по 5 шоколадок. Чем меньше оказывается делитель, тем больше становится частное. Так продолжается, пока делитель не достигнет 1. Рассмотрим числа меньше 1. Допустим, мы делим 10 шоколадок между 1/3 команды. Треть хоккейной команды – это 2 человека. Следовательно, 10 шоколадок делится между 2 игроками, то есть каждый игрок получает по 5 шоколадок. Но это равнозначно тому, как если бы вся команда получила $5 \times 6 = 30$ шоколадок. Итак, при делении 10 на

Да Винчи, несомненно, пришлось бы туго в вашей школе. По программе американские школьники должны овладеть дробями к 12–13 годам и научиться, например, расставлять по возрастанию дроби 1/2, 5/9 и 2/7. А вам такое по плечу? Большинству 12- и 13-летних школьников это не под силу.

Вот другой пример: какое из чисел – 1, 2, 19 или 21 – ближе к сумме 12/13 и 7/8? Три четверти 12- и 13-летних американских школьников дают неверный ответ[21]. Самая распространенная ошибка – складывать числители и знаменатели (верхние и нижние числа) по отдельности, то есть обращаться с ними как с натуральными числами. Удивляться здесь нечему, ведь именно этому вас и учили до сих пор. Вместо этого вам нужно либо давать этим числам приблизительную оценку (и 12/13, и 7/8 близки к 1, поэтому их сумма будет близка к 2), либо приводить дроби к общему знаменателю и затем складывать друг с другом скорректированные числители. Стоит задуматься об этом, как дроби сразу кажутся чем-то жутким и беспощадным. Мы уже знаем, что умение работать с натуральными числами далось человечеству большими стараниями, но в случае с дробями все эти навыки приходится отправлять на помойку[22].

1/3 получается 30.

[21] McNamara J., Shaughnessy M. M. *Student errors: what can they tell us about what students DO Understand?* Math Solutions, 2011.

[22] Ответ на первый вопрос: 2/7, 1/2, 5/9. Ответ на второй вопрос: 2. Прийти к ним можно либо путем аппроксимации (и 12/13, и 7/8 близки к 1, поэтому их

Сколько бы сложностей с ними ни возникало, цивилизация за цивилизацией понимала, что дроби стоят того, чтобы над ними попотеть. Вавилоняне осознали это первыми, около 2000 года до нашей эры, а за ними последовали древние египтяне, индусы, греки и китайцы. А это значит, если я не ошибся в расчетах, что вид, который живет на Земле уже 300 тысяч лет, применяет дроби (по очень грубой оценке) на протяжении лишь последней сотой части своего существования. Если вы еще не убедились в том, что даже в базовой математике нет ничего естественного и безусловного, то вот вам доказательство.

Дело в том, что ведение учета невозможно без двух других математических инноваций: отрицательных чисел и понятия нуля. И хотя сегодня они общеприняты и кажутся простыми, обе идеи поначалу вызывали споры, а потому сегодняшнее положение они смогли занять лишь через несколько сотен лет после своего появления.

Необходимость в отрицательных числах

Странно понимать, что мы тысячелетиями производили вычитание, хотя никто не мог ответить на вопрос "Сколько

сумма близка к 2), либо путем приведения дробей к общему знаменателю. Превратим 12/13 в 96/104, умножив числитель и знаменатель на 8. Затем превратим 7/8 в 91/104, умножив числитель и знаменатель на 13. Сложим числители. 96 + 91 = 187, а значит, в сумме дроби дают 187/104. Это приблизительно 1,8, что ближе всего к 2.

будет 1 минус 2?”. Но виноват в этом опять же наш мозг. Мы просто не можем представить себе минус одно яблоко, поэтому нам нечего и надеяться на врожденное понимание отрицательных чисел. Они стали еще одним огромным скачком, еще одной концепцией, которую человеку пришлось создать с нуля. Однако, как и дроби, отрицательные числа оказались слишком полезными, чтобы их не изобрести.

История у отрицательных чисел получилась весьма запутанной. Трактат “Артхашастра”, составленный древнеиндийским учителем Каутильей, вероятно, около 300 года до нашей эры, свидетельствует, что бухгалтерское дело в Индии было в то время уже достаточно развито: индусам были знакомы понятия активов, долга, выручки, расходов и доходов, и есть основания предположить, что индийские счетоводы, возможно, уже тогда обозначали долги отрицательными числами. В сочинении “Математика в девяти книгах” китайский математик Чжан Цан проводил расчеты с отрицательными числами. Мы точно не знаем, когда оно было написано – вероятнее всего, между 200 годом до нашей эры и 50 годом нашей эры, – но в нем говорится, что красные палочки обозначают положительные числа, а черные палочки соответствуют отрицательным числам. Однако, несмотря на применение отрицательных чисел в арифметике, Чжан Цан не мог смириться с тем, что их можно получать и при таких операциях, как решение уравнений. Судя по всему, в его представлении они были чисто практическим инструментом коммерции и торговли.

В 628 году нашей эры индийский математик Брахмагупта также предлагал выражать долг отрицательными числами. Он даже представил правила умножения (произведение) и деления (частное) при работе с положительными числами (достатками) и отрицательными числами (долгами):

Произведение или частное двух достатков – один достаток.

Произведение или частное двух долгов – один достаток.

Произведение или частное одного долга и одного достатка – долг.

Произведение или частное одного достатка и одного долга – долг.

Выражаясь современным языком, мы сказали бы:

При умножении или делении двух положительных чисел получается положительное число.

При умножении или делении двух отрицательных чисел получается положительное число.

При умножении или делении отрицательного числа на положительное число получается отрицательное число.

При умножении или делении положительного числа на отрицательное число получается отрицательное число.

Возможно, эти правила знакомы вам в другой формулировке: “Минус на минус дает плюс, а плюс на минус дает минус”.

Очевидно, к этому моменту индийские счетоводы уже свободно обращались с отрицательными числами. Но в западном мире прогресс шел гораздо медленнее. Проблема была в том, что Запад унаследовал математику от древних греков, а те обожали целые числа. Они могли делить их, получая дроби, но, какими бы маленькими ни становились числа, они никогда не оказывались отрицательными.

Первое осторожное упоминание отрицательных чисел в западном мире было сделано в “Книге абака”, написанной в 1202 году. Вам, возможно, знакомо имя ее автора – Фибоначчи. На самом деле его звали иначе, а это прозвище ему придумал биограф несколько столетий спустя. Но Леонардо Пизанский действительно был сыном Гильермо Боначчи (отсюда и “фи” – сын – Боначчи), и прозвище так прочно прикрепилось к нему, что сейчас именно оно считается одним из величайших имен в математике.

На заре своей карьеры Фибоначчи служил на итальянской таможне и работал в Алжире. Сопровождая отца в поездках в такие страны, как Сирия и Египет, он рано познакомился с математикой, выходящей за итальянскую традицию, и узнал множество операций и идей, которые казались радикальными, революционными, а иногда просто полезными. В “Книге абака” содержится немало математических изобретений, задач, решений и курьезов, включая правила (основанные на темпе бесконтрольного увеличения популяции кроликов) составления числовой последовательности, которая теперь носит имя Фибоначчи[23]. Но также в книге рассматривалось использование отрицательных чисел как общепризнанного математического инструмента. В качестве примера Фибоначчи предложил задачу, в которой четыре человека в заданных пропорциях делят деньги из кошелька:

есть четыре человека; у первого с кошельком вдвое больше второго и третьего, у второго с кошельком втрое больше третьего и четвертого, у третьего с кошельком вчетверо больше четвертого и первого. У четвертого с кошельком впятеро больше первого и второго…

Обозначив четырех мужчин буквами от A до D, а кошелек – буквой P, получим такую “систему уравнений”:

$A + P = 2\,(B + C)$
$B + P = 3\,(C + D)$
$C + P = 4\,(D + A)$
$D + P = 5\,(A + D)$

[23] Последовательность Фибоначчи начинается с 0 и 1, а каждое следующее число в ней получается путем сложения двух предыдущих. Первые 12 чисел таковы: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и 89.

Эти уравнения устанавливают числовые отношения между всеми неизвестными, и Фибоначчи утверждает, что задача имеет целый ряд решений, но минимальные значения таковы: “У второго – 4, у третьего – 1, у четвертого – 4, в кошельке – 11, а дебет первого – 1”. Любопытно, что здесь появляется понятие “дебет”. Фибоначчи подчеркивает, что “задача не имеет решения, если не допустить, что у первого человека может быть дебет”, и показывает, что наличие дебета предполагает осуществление арифметических действий с отрицательными числами.

Хотя, написав книгу, Фибоначчи сумел распространить некоторые математические идеи в европейской среде, с отрицательными числами у него почти ничего не вышло. Запад не принимал их еще несколько сотен лет. Так, французский математик Блез Паскаль полагал, что, если вычесть 4 из 0, получится 0, – и презрительно отзывался обо всех, кто считал иначе. В своих “Мыслях” он сказал: “Я знаю людей, которые не могут понять, что если от нуля отнять четыре, останется ноль”[24]. И это в середине XVII века, в эпоху микроскопов, телескопов, законов Ньютона и электричества. Даже в период научных открытий и появления технологических инноваций некоторые из лучших западных умов не желали признавать существование отрицательных чисел.

Ситуация начала меняться, лишь когда Джон Валлис, Са-

---

[24] Pascal B. *Pensées, www.gutenberg.org/files*/18269/18269-*h*/18269-*h.htm.* Перевод Ю. Гинзбург.

вильский профессор геометрии Оксфордского университета, понял, что людям думается проще, когда они могут представить картину происходящего. В 1685 году он опубликовал “Трактат по алгебре”, в котором выстроил числа в ряд и позволил им уйти в отрицательную область. Он отметил, что в абстрактной форме осознать это сложно. Но если представить какую-нибудь физическую величину, например расстояние, все сразу станет понятно. Разумеется, он выразился несколько иначе. Вот его слова:

Нельзя, однако, сказать, что гипотеза (об отрицательных числах) бесполезна или абсурдна, если правильно ее трактовать. Хотя в чисто алгебраической записи она добавляет величину, которая меньше нуля, в физическом приложении она обозначает величину столь же реальную, как если бы знаком ее был +, только трактуемую в противоположном смысле[25].

Иными словами, это положительное число наоборот. По сути, так бы сказали и мы. В качестве “физического приложения” он измеряет расстояние по прямой от заданной точки, а затем обратно – и дальше. Он спрашивает, как далеко от стартовой позиции окажется человек, если отойдет на 5 ярдов от точки А, а затем вернется на 8 ярдов назад. Он по-

[25] Wallis J. *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 15, no. 173 (1685): 1095–1106.

лучает ответ –3, который, несомненно, дали бы и вы.

Числовая прямая Джона Валлиса

Любопытно читать длинное объяснение, сопровождающее утверждение Валлиса. “Получается, что он прошел на три ярда меньше, чем ничего”, – говорит он и пускается в рассуждения, всячески разжевывая свою мысль. Если сегодня для ответа достаточно было бы поставить галочку в нужной клетке детского задачника, то Валлис прикладывает немало усилий, чтобы разложить все по полочкам, и еще на целых 17 строк расписывает значимость ответа –3. Он явно понимал, насколько радикальна его мысль.

Сегодня знак минуса кажется нам лишь камешком в гигантской пирамиде математических инструментов. Мы настолько привыкли к нему и так хорошо понимаем его смысл, что теперь нам сложно увидеть в нем принципиальную инновацию. Признание существования отрицательных чисел не только дало нам способ подсчитывать долги, но и позволило простым и естественным образом математически описывать множество различных явлений. К примеру, физические силы: работая с положительными и отрицательными числами, мы можем прогнозировать дальность полета артиллерийских снарядов с учетом гравитации. Мы также можем возводить крепкие, устойчивые архитектурные сооружения, в которых будут сбалансированы все силы и нагрузки. Всякий раз, когда друг другу противостоят две вещи – космический корабль и сила тяготения, доход и расход, ветер в парусах и сопротивление океана, которое судну приходится преодолевать, рассекая волны, – отрицательные числа упрощают расчеты.

Однако, несмотря на силу отрицательных чисел, одни они не могли подарить нам современный мир. Возможно, вы заметили, что на числовой прямой Валлиса нет чисел – есть лишь отрезки, отмеченные буквами A, B, C и D. Буквы соответствуют тому, что мы обозначили бы числами 0, 5, 3 и –3, и Валлис неспроста решил отказаться от них. Еще один важнейший математический инструмент – ноль – пока не получил признания.

Значимое ничто

История нуля восходит к моменту, когда царь Шульги ввел в своем математическом государстве “позиционную систему счисления”. Мы очень быстро усваиваем, что, записывая число, такое как 1234, мы можем присваивать отдельным цифрам разные значения в зависимости от того, какую позицию они занимают. Низшую позицию здесь занимает цифра 4, которая обозначает четыре элемента, например четыре яблока. Если выражаться математическим языком, наша система имеет основание 10 и называется десятичной, поскольку мы группируем числа в десятки, и потому цифра в следующей позиции обозначает три десятка, то есть 30. Двигаясь дальше влево, мы получаем результат умножения предыдущей позиции на десять, то есть десять десятков, или сотню. В числе 1234 их две. Наконец, остается одна группа из десяти сотен, то есть тысяча. В итоге получается число 1234.

Позиционная система счисления царя Шульги была шестидесятеричной, а не десятичной. Сложно сказать, почему именно такая техника записи чисел обрела в древности такую популярность. Одни историки математики видят причину в том, что число 60 дает целые частные при делении на любое из целых чисел с 1 до 6 (и еще на шесть чисел). Благодаря этому с ним легко работать, особенно при делении товаров, цен и мер. Другие предполагают, что удобство шестидесятеричной системы объясняется примерным числом дней в году. Какой бы ни была причина, эта система оставила наследие: именно в ближневосточных царствах, которые в итоге образовали Вавилон, круг разделили на 360 градусов, градус и час – на 60 минут, а минуту – на 60 секунд.

Вавилонская шестидесятеричная система похожа на нашу десятичную: например, число 34 в ней записывается тремя символами, обозначающими десятки, и четырьмя символами, обозначающими единицы. Но условных знаков в ней хватает лишь для записи чисел до 59, поэтому десятичное число 424 000 в шестидесятеричной системе состояло бы из сорока единиц, 46 групп по шестьдесят, 57 групп по шестьдесят на шестьдесят (60^2) и 1 группы по шестьдесят на шестьдесят на шестьдесят (60^3).

Такая запись (как и наша) удобна, пока в числе нет отсутствующих “групп”. Но как же записать в десятичной системе число 4005, в котором нет ни сотен, ни десятков? Нам нужно было найти способ обозначать “отсутствие” при записи числа. Так мы и начали использовать знак, который сегодня называем нулем.

Нулем он был не всегда. В этой истории много белых пятен, но, судя по всему, в Вавилоне пустая позиция обозначалась наклонным клинописным символом  (хотя даже это оспаривается)[26]. Майя и инки также обозначали пустую позицию абстрактным символом или глифом. Ни один из этих символов, однако, не был знакомым нам нулем, который, как считается, пришел к нам из Индии, где точкой – *шуньей* – обозначалась пустота. Самый ранний из известных нам документов, в которых этой круглой заглушкой обозначаются пустые позиции, – манускрипт Бакхшали, индийский текст, написанный на 70 листах бересты. Он датирует-

[26] Seife C. *Zero: The Biography of a Dangerous Idea.* New York: Viking, 2000.

ся 224–383 годами нашей эры и, возможно, служил учебным пособием для буддийских монахов. Но шунья не сразу стала математическим нулем. В написанном в 628 году трактате Брахмагупты, где признается существование отрицательных чисел, также впервые используется ноль – в этом случае индийская шунья, – который обозначает не просто пробел. Он входит в числовую последовательность и сам по себе считается величиной, которая подчиняется тем же законам арифметики, что и другие величины. Брахмагупта объясняет, как ноль взаимодействует с другими числами, как положительными, так и отрицательными:

Долг минус ноль – это долг.
Достаток минус ноль – это достаток.
Ноль минус ноль – это ноль.
Ноль минус долг – это достаток.
Ноль минус достаток – это долг.
При умножении нуля на долг или достаток получается ноль.
При умножении нуля на ноль получается ноль.

Запад с нулем познакомил персидский математик и астроном X века Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми. В своих книгах он использовал цифры, которые теперь называются арабскими или индо-арабскими, и включал в их число ноль, подчеркивая его значимость для позиционной системы счисления. Он называл его “сифр”, что в переводе значит “пустой”. В латыни это слово превратилось в *zephyrum*, и от него итальянцы образовали слово *zero*, то есть “ноль”.

Но аль-Хорезми использовал ноль не только для записи чисел. Как и Брахмагупта, он применял его в качестве алгебраического инструмента, тем самым закрепляя его значимость при проведении манипуляций с числами, и называл его “десятой цифрой с форме круга”. Аль-Хорезми явно считал ноль одной из цифр, и ноль играет ключевую роль в его “Краткой книге о восполнении и противопоставлении”. Именно от его арабского названия – “Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала” – произошло слово “алгебра”, а слово “алгоритм” стало производным от имени автора: аль-Хорезми, несомненно, оказался весьма влиятелен. Он считал, что пользоваться его трактатом сможет кто угодно, ведь в нем содержались числовые инструменты, применимые “при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, строительстве и прочих разновидностях подобных дел”[27]. Однако, несмотря на широкий спектр возможных применений, западные умы не спешили принимать концепцию нуля.

Сегодня ноль кажется нам настолько очевидным и знакомым инструментом, что сложно представить себе системы

---

[27] Перевод цитируется по изданию: Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. *Математические трактаты*. Ташкент: Издательство “Фан” Узбекской ССР, 1983.

счисления, которые обходились бы без него. Когда в X веке французский монах Герберт Орильякский прибыл в Испанию, чтобы изучить исламскую математику, он познакомился с нулем, но оставил его без внимания. Герберт оценил математические идеи аль-Хорезми и распространил многие из них среди европейских купцов. И все же ноль он в Европу не принес, а предпочел вместо этого научить людей искусству счета на абаке.

Даже через двести лет после путешествия Герберта ноль все еще не принимали: считается, что английский историк Вильям Мальмсберийский называл его "опасным сарацинским колдовством"[28]. И даже когда Фибоначчи продемонстрировал европейцам силу нуля, он все же поостерегся включать его в числовой ряд. В "Книге абака" Фибоначчи пишет: "Индийских цифр девять: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. С помощью этих девяти цифр и знака 0… можно записать любое число". Он называет ноль "знаком", и это свидетельствует, что он, в отличие от аль-Хорезми, пока не решался включить его в число цифр.

Сложно сказать, почему именно. Отчасти из-за неприятия идеи о том, что отсутствие чего-либо можно рассматривать аналогично присутствию. В математической философии Древней Греции отрицательным числам не находилось места среди священных целых положительных чисел,

---

[28] Kaplan R. *The Nothing That Is: a natural history of zero.* Oxford: Oxford University Press, 2000.

и точно так же она не терпела попытки превратить ничто в какую-то сущность, заслуживающую внимания. Аристотель в своем трактате “Физика” отметил, что невозможно осуществлять осмысленное деление на ноль, а следовательно, ноль нельзя считать числом[29]. Но важнее, пожалуй, то, что нулю не находилось места на абаке – главном счетном инструменте образованной публики в средневековой Европе.

Абак не всегда был таким, каким мы представляем его сейчас: с бусинами или камушками, нанизанными на нитки. Считается, что его название произошло от древних ближневосточных слов “пыль” и “доска”, и можно предположить, что изначально на плоской поверхности рассыпали пыль, на которой затем писали пальцем или раскладывали камни, а после этого стирали написанное и начинали счет заново.

Устройство абака позволяет обходиться без нуля. Видя ровные ряды камней или отметок, человек мгновенно получает позиционную информацию, не нуждаясь в специальном знаке для обозначения пустого разряда. Освоив все алгоритмы работы с абаком, он, конечно, уже не захочет разбираться в новомодном способе записи чисел.

Раньше умение считать на абаке было весьма востребованным навыком. В нем было даже нечто соблазнительное. При работе над “Рассказом мельника”, который входит в сборник “Кентерберийские рассказы”, Джеффри Чосер постарался сделать главного героя беззастенчивым (во всех

---

[29] *Physics by Aristotle, http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html.*

смыслах) интеллектуалом. У Душки Николаса были астролябия для проведения астрономических измерений и греческий учебник, которым он руководствовался при работе. Чосер отмечает, что у изголовья его кровати стояли счеты с приведенными в порядок костяшками: он всегда был готов приступить к расчетам. По сути, он был занудой. При этом он сумел наставить рога богатому, но заурядному плотнику, у которого снимал комнату, и по меркам современной культуры это весьма неожиданный поворот. Но в "Рассказе мельника" Чосер делает Николаса неотразимым в глазах прекрасной молодой жены плотника.

Ученые предполагают, что в Николасе воплотились все черты, которые ценил близкий друг Чосера король Ричард II. Чосер написал "Кентерберийские рассказы", когда входил в ближний круг короля и, что более интересно в нашем случае, служил главным таможенным контролером в лондонском порту. Счеты появились в рассказе неспроста: в 1380-х ими владели лишь образованные люди, в число которых входил и Чосер.

Сегодня в мире используются разные счетные доски: китайский суаньпань, японский соробан, русские счеты и так далее. Во многих регионах младших школьников по-прежнему учат с их помощью визуализировать основные арифметические действия, и есть свидетельства тому, что работа со счетной доской перестраивает мозг человека[30]. Луч-

---

[30] Weng J. et al. *The effects of long-term abacus training on topological properties of*

шие современные счетоводы – главным образом школьники из Восточной Азии – так умело используют счеты, что многим из них сам инструмент уже не нужен. Они переставляют костяшки в уме, подобно тому, как опытный шахматист разыгрывает партию в голове, не используя ни доску, ни фигуры. Опытные счетоводы не только складывают и вычитают на счетах, но и извлекают с их помощью квадратные корни. Однако, несмотря на чудеса абака, уже многие века мы обходимся без него – главным образом потому, что ноль указал нам на его несовершенства. Математическая запись, в которой есть необходимое количество нулей, позволяет нам работать с числами любой величины и проводить расчеты любой сложности.

Насколько нам известно, впервые на Западе ноль и арабские цифры ввели в официальный обиход в 1305 году на предприятии Галлерани в Пизе[31]. Римские цифры, однако, остались в моде и все следующее столетие господствовали в сфере счетоводства: купцы и банкиры не слишком любят перемены. Но постепенно люди стали понимать, что римские цифры и другие системы без нуля усложняют арифметику. Появление арабских цифр позволило проводить письменные расчеты, поддающиеся проверке. Записывая числа с помощью цифр от 1 до 9 с добавлением 0, мы получили

brain functional networks. Scientific Reports. 7, no. 1 (2017): 8862.

[31] Goldthwaite R. *The practice and culture of accounting in Renaissance Florence*. Enterprise & Society. 16, no. 3 (2015): 611–47.

возможность разрабатывать алгоритмы – рецепты для расчетов, – облегчающие умножение и деление огромных чисел. Со временем необходимость в счетах исчезла, и уже к 1500 году администраторы банка Медичи ввели четкое правило: в их банковских книгах должны были использоваться только арабские цифры[32]. Медленно, но верно их влияние росло. Через несколько сотен лет арабские цифры, включая ноль, обойтись без которого так и не удалось, захватили весь мир.

Не случайно это совпало с беспрецедентным ускорением развития человеческого общества. Когда в наш инструментарий вошли ноль и отрицательные числа, мы получили возможность вести учет чисел, которые хлынули к нам в эпоху международной торговли и процветания, и свидетельствами тому стали банк Медичи, Великая французская революция и блестящие финансовые нововведения Александра Гамильтона.

Бухгалтерский учет

Ускорение, как ни странно, началось после перехода к двойной записи. В простейшей форме это способ вести бухгалтерию безошибочно. Каждая транзакция записывается на двух отдельных счетах, чтобы можно было сверять их друг с другом. Основы этого метода прекрасно изложены в опубли-

---

[32] Gleeson-White J. *Double Entry: how the merchants of Venice created modern finance*. New York: W. W. Norton & Co, 2012.

кованной в 1494 году “Сумме” Луки Пачоли, о которой мы упоминали, когда рассматривали знаки для счета на пальцах: “Из всякой статьи, составленной тобою в Журнале, всегда следует сделать две в Главной книге; одну в «Дать» и другую в «Иметь». Должник всегда обозначается словом «на», а веритель – «от»… Тот и другой образуют отдельные статьи, причем статья должника помещается по левой, а верителя – по правой стороне”[33]

---

[33] Schemmen M. *The Rules of Double-Entry Bookkeeping (a Translation of Particularis de Computis et Scripturis).* IICPA Publications, 1494. “Сумма” Пачоли цитируется в переводе Э. Вальденберга.

Конец ознакомительного фрагмента.